

# UN MODELE DE STRUCTURE PAR TERME DES PRIX DES MATIERES PREMIERES AVEC COMPORTEMENT ASYMETRIQUE DU RENDEMENT D'OPPORTUNITE

Delphine LAUTIER, CEREG, Université Paris IX  
Alain GALLI, CG, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris<sup>1</sup>

## RESUME :

Cet article propose un nouveau modèle de structure par terme des prix des matières premières, dans lequel le rendement d'opportunité<sup>2</sup> présente un comportement asymétrique. Un tel modèle permet de valoriser des transactions avec livraison différée sur le marché physique et de couvrir le produit de ces transactions contre les fluctuations des prix des matières premières (section 1). L'étude de la théorie du stockage conduit à formuler l'hypothèse d'asymétrie du rendement d'opportunité et met en évidence les fondements théoriques du modèle proposé, qualifié de modèle asymétrique (section 2). La présentation de ce modèle montre la façon dont il s'inspire de celui proposé par Schwartz en 1997 tout en introduisant l'hypothèse d'asymétrie du rendement d'opportunité (section 3). Afin de tester les performances du modèle asymétrique, un filtre de Kalman étendu est élaboré. Ce dernier permet de prendre en considération le caractère non linéaire du modèle (section 4). Une comparaison des performances du modèle de Schwartz et du modèle asymétrique, réalisée sur le marché du pétrole brut, permet enfin de montrer que l'hypothèse d'asymétrie du rendement d'opportunité est vérifiée (section 5).

MOTS CLES : théorie du stockage - rendement d'opportunité - modèles stochastiques – structure par terme – marchés complets – filtre de Kalman étendu - pétrole brut.

## SECTION 1. INTRODUCTION

En 1985, Brennan et Schwartz ont, pour la première fois, proposé un modèle de structure par terme des prix des matières premières. Ce type de modèle a pour objectif de représenter la structure par terme des prix, c'est-à-dire la relation, à une date donnée, entre des prix à terme pour différentes échéances de livraison. Ils se sont inspirés des méthodes de valorisation relative développées dans le cadre des marchés obligataires.

Dans le modèle de Brennan et Schwartz, le prix au comptant est l'unique variable d'état expliquant le comportement des prix à terme. Le rendement d'opportunité, qui peut être brièvement défini comme le "confort" apporté par la détention de stocks sur le marché physique, est supposé constant. En 1989, Gibson et Schwartz soulignent les limites associées à l'hypothèse de rendement d'opportunité constant. Ils proposent, en 1990, un modèle dans lequel deux variables d'état positivement corrélées expliquent le comportement des prix à terme des matières premières : le prix au comptant et le rendement d'opportunité. En 1997, Schwartz améliore le modèle de 1990 en introduisant le rendement d'opportunité, qui intervient comme un dividende stochastique dans la dynamique du prix au comptant. Il propose également un modèle à trois facteurs, dans lequel le taux d'intérêt est stochastique.

---

<sup>1</sup> lautier@cerna.ensmp.fr ; galli@cg.ensmp.fr

<sup>2</sup> Le rendement d'opportunité correspond au *convenience yield* de la littérature anglo saxonne.

Sur le plan théorique, ces travaux ont permis une avancée considérable dans la compréhension de la relation entre le prix au comptant et le prix à terme et dans la représentation de la structure par terme des prix des matières premières. Pour les firmes impliquées dans la production et la commercialisation de matières premières, l'intérêt pratique de ces travaux est considérable : ils permettent en effet de valoriser une transaction avec livraison différée sur le marché physique et de protéger le produit de cette transaction contre les fluctuations des prix des matières premières, en utilisant les échéances les plus rapprochées des marchés à terme, celles pour lesquelles la liquidité est la plus élevée<sup>3</sup>.

L'objectif de cet article est de proposer un modèle de structure par terme des prix des matières premières plus performant que les précédents, en introduisant une hypothèse nouvelle quant au comportement du rendement d'opportunité. Ce modèle est une version généralisée du modèle à deux facteurs proposé par Schwartz en 1997.

La construction d'un tel modèle requiert, en premier lieu, la compréhension des mécanismes de formation des prix à terme dans un marché de matières premières. La seconde section de cet article est donc consacrée à l'étude des relations entre le prix au comptant et le prix à terme, à travers la théorie du stockage. Une revue de la littérature permet de définir la notion de rendement d'opportunité et de formuler l'hypothèse selon laquelle ce dernier a un comportement asymétrique. En section trois, la présentation du modèle asymétrique montre que celui-ci constitue une généralisation du modèle à deux facteurs proposé par Schwartz en 1997. Pour apprécier les performances de son modèle, Schwartz avait mis en oeuvre un filtre de Kalman simple. Cette méthode ne peut cependant être utilisée dans le cas du modèle asymétrique, compte tenu de son caractère non linéaire. Un filtre de Kalman étendu, adapté à cette particularité, est donc proposé en section quatre. Dans le but de valider l'hypothèse de comportement asymétrique du rendement d'opportunité, les performances du modèle de Schwartz et du modèle asymétrique sont comparées, en section cinq, sur le marché du pétrole brut. Le modèle asymétrique se révélant plus performant que le modèle de Schwartz, l'hypothèse semble validée. La sixième section permet de conclure l'article en résumant ses principaux apports et en proposant des voies de recherche ultérieures.

## SECTION 2. LA THEORIE DU STOCKAGE ET LE RENDEMENT D'OPPPORTUNITE

Le prix au comptant représente la somme à payer pour disposer de la marchandise immédiatement. Parallèlement, le prix à terme est un prix établi aujourd'hui pour une livraison ultérieure. La base, définie comme la différence entre le prix à terme et le prix au comptant, peut être positive ou négative : dans le premier cas, les stocks sont abondants et les prix sont en report (*contango*) ; dans le second, les stocks sont rares et les prix sont en déport (*backwardation*).

Deux théories complémentaires permettent d'expliquer le comportement de la base : la théorie du déport normal, proposée par Keynes en 1930, l'explique à partir de l'équilibre des positions de couverture des opérateurs sur le marché à terme ; la théorie du stockage est centrée sur l'analyse des motifs de détention des stocks des opérateurs du marché physique et sur les coûts de stockage. Ces deux théories, formulées pour l'essentiel entre 1930 et 1958, sont aujourd'hui encore l'objet de nombreuses recherches. Nous accorderons ici une place

---

<sup>3</sup> Des précisions sur les stratégies de couverture associées aux modèles de structure par terme des prix sont fournies par Brennan et Crew (1995), Schwartz (1997) et Lautier (1998).

privilegiée à la théorie du stockage et à la notion de rendement d'opportunité, qui lui est associée. Elles constituent en effet le principal support théorique permettant l'élaboration de modèles de structure par terme des prix des matières premières.

## 2.1 L'EXPLICATION DES SITUATIONS DE REPORT ET DE DEPORT

La théorie du stockage montre que le prix à terme, dans un marché de matière première, est supérieur au prix au comptant, d'un montant correspondant au coût de stockage de la marchandise entre la date présente et l'échéance du contrat à terme. Cette théorie, énoncée à l'origine dans le contexte de stocks en surplus, ne permet pas d'expliquer la relation entre le prix à terme et le prix au comptant lorsque les stocks deviennent rares (encadré). En effet, si le prix à terme est égal au prix au comptant augmenté de coûts de stockage positifs, comment peut-il devenir inférieur au prix au comptant ? La notion de rendement d'opportunité, introduite par Kaldor (1939), apporte une réponse à cette question.

### **Les relations d'arbitrage entre le marché physique et le marché à terme**

En présence de stocks en surplus, le niveau du report ne peut se maintenir à un niveau supérieur à celui des coûts de stockage. Si une telle situation se produisait, des opérations d'arbitrage "*cash and carry*" rétabliraient l'équilibre : il deviendrait en effet rentable d'acheter des stocks sur le marché au comptant, de les conserver et, simultanément, de les vendre à terme. La vente de contrats entraînerait une baisse du prix à terme, le prix au comptant augmenterait sous l'effet des achats de stocks et les opportunités d'arbitrage disparaîtraient.

Dans une situation de surplus de stocks, les prix ne peuvent pas non plus être en situation de déport. Il serait dans ce cas possible de vendre les stocks sur le marché au comptant et simultanément de les racheter à terme (opérations d'arbitrage "*reverse cash and carry*"). La multiplication de ces opérations conduirait, sous l'effet de ventes massives de stocks, à une baisse du prix au comptant. Simultanément, le prix à terme augmenterait suite aux achats de contrats. Les opérations d'arbitrage cesseraient lorsque le prix à terme serait supérieur au prix au comptant d'un montant représentant le coût de stockage. L'existence de stocks en surplus conduit ainsi à une situation de report.

La base est donc en déport lorsque les stocks sont peu abondants. Dans cette situation, les arbitrages "*reverse cash and carry*" deviennent en effet improbables, et ce d'autant plus que la pénurie est prononcée : les opérateurs n'ont aucun intérêt à se défaire de leurs stocks tant qu'ils anticipent une hausse supplémentaire du prix au comptant.

Cette analyse des relations d'arbitrage entre le marché physique et le marché papier permet de montrer que la base évolue de façon différente lorsqu'elle est positive ou négative : en situation de report, les stocks sont abondants, et le prix à terme ne peut excéder le prix au comptant d'un montant supérieur au coût de stockage de la marchandise entre la date présente et l'échéance du contrat. Tant que les capacités de stockage ne sont pas parvenues à saturation, la base est stable, et limitée au coût de stockage sous l'effet des opérations d'arbitrage "*cash and carry*". En situation de déport, en revanche, les stocks sont rares, et la base est déterminée uniquement par le prix que les opérateurs sont prêts à payer pour se procurer la marchandise immédiatement. Aucune limite objective ne la détermine. De plus, les stocks n'étant pas suffisamment abondants pour absorber les fluctuations de la demande, le prix au comptant est volatil, et la base est dans ce cas instable.

Le rendement d'opportunité est défini par Kaldor comme le bénéfice qu'un opérateur retire de la détention de stocks : celui-ci dispose en effet de la marchandise dès qu'il en a besoin, sans avoir à supporter le coût associé à des commandes fréquentes, ni celui lié à l'attente des livraisons. Ce bénéfice est celui de la disponibilité : il représente le "confort" associé à la détention de stocks, d'autant plus apprécié que le niveau des stocks est faible.

Bien que cette définition ait ensuite évolué, le rôle du rendement d'opportunité dans l'interprétation de la relation entre prix au comptant et prix à terme n'a pas changé : il permet d'expliquer le fait que le prix à terme puisse devenir inférieur au prix au comptant. Lorsque le marché se trouve en situation de pénurie, suite par exemple à une augmentation inattendue de la demande, le rendement d'opportunité peut en effet devenir supérieur au coût de stockage, et une situation de déport peut s'instaurer.

## 2.2 LA NOTION DE RENDEMENT D'OPPORTUNITE

Une grande partie des travaux réalisés dans le cadre de la théorie du stockage a été consacrée à la définition et à l'étude du rendement d'opportunité. Une synthèse de ces travaux permet de proposer une définition exhaustive du rendement d'opportunité, de formuler une hypothèse quant au comportement dynamique de ce dernier, et de préciser la relation entre le prix au comptant et le prix à terme dans un marché de matières premières.

### 2.2.1 Revue de la littérature

Selon Kaldor (1939), la détention de stocks en situation de déport permet de répondre à la demande sans supporter de délais de livraison. Brennan (1958) complète cette analyse : pour lui, les stocks permettent de profiter d'une hausse imprévue de la demande sans supporter le coût de l'attente de l'approvisionnement. L'auteur souligne que l'éloignement des lieux de production et de consommation ne présente une contrainte que si la demande future est incertaine.

Working (1949) explique quant à lui la détention de stocks en situation de déport par la présence de coûts fixes élevés dans l'activité de stockage. A travers la notion de rendement de réserve, Weymar (1968) invoque à son tour la présence de coûts fixes élevés dans les activités de production et de transformation pour expliquer ce phénomène. Le rendement de réserve des stocks est lié à la nécessité d'assurer la continuité de la production. Plus le risque de rupture d'approvisionnement est important, et plus le rendement de réserve augmente : celui-ci est une fonction décroissante du niveau des stocks. Dans ce contexte, si des stocks sont détenus en situation de déport, c'est parce que les capacités de production, de stockage, de transport et de transformation ne sont pas adaptées au niveau de l'activité : il y a surcapacité. Cela peut s'expliquer soit par le caractère saisonnier des matières premières, auquel cas la surcapacité n'est que momentanée, soit par une erreur d'appréciation du niveau d'activité lors de la construction des capacités.

Enfin, Williams et Wright (1989) proposent l'explication suivante : si les opérateurs détiennent des stocks en situation de déport, c'est parce que, compte tenu de l'incertitude affectant à la fois l'offre et la demande futures de matière première, et compte tenu des possibilités présentes et futures d'allocation de ces stocks, cela reste le meilleur moyen de minimiser leurs coûts de "transformation", c'est-à-dire les coûts de transport, de transformation proprement dite, ou de commercialisation de la matière première. Plusieurs

éléments contribuent à la rigidité du processus de "transformation" : en premier lieu, ce processus n'est pas nécessairement réversible<sup>4</sup>. En second lieu, les opérations de transport, de transformation et de commercialisation sont caractérisées par la présence de coûts fixes élevés. Enfin, les stocks, de qualité variable, peuvent être éloignés des lieux de transformation ou de commercialisation.

Les principales conclusions de ces travaux peuvent être synthétisées de la façon suivante : la détention de stocks en situation de déport est expliquée par deux éléments, l'incertitude affectant l'offre et la demande de matières premières d'une part, et la rigidité des activités industrielles et commerciales dans lesquelles les matières premières sont impliquées d'autre part. Cette rigidité se manifeste par une incapacité, pour les opérateurs, à adapter rapidement l'offre à une variation de la demande. Elle peut être liée à la présence de coûts fixes élevés dans les activités de transport, de stockage, de production et de transformation de la marchandise, à la distance séparant les lieux de production et de consommation de la matière première, ou à l'existence d'un différentiel de qualité entre différents stocks. Incertitude et rigidité agissent le plus souvent de façon conjointe. A ces deux éléments s'ajoute enfin, en situation de déport comme en situation de report, la possibilité pour certains producteurs de restreindre leur offre.

#### 2.2.2. L'hypothèse d'asymétrie du rendement d'opportunité

La définition du rendement d'opportunité et l'analyse des relations d'arbitrage (encadré) permettent de formuler une hypothèse quant au comportement de ce dernier.

Lorsque les stocks sont rares, toute modification de la demande de matière première a un impact plus important sur le prix au comptant. Ce prix étant plus volatil, le bénéfice retiré de la vente ou de la transformation de stocks, rendu possible par la détention de marchandises, suit la même évolution. De plus, en situation de pénurie de stocks, l'ajustement entre les opérations de production, de transport et de transformation de la matière première n'est plus aussi bien assuré que dans les conditions de fonctionnement "normales" du marché. En retenant la terminologie de Weymar, le rendement de réserve associé aux stocks, inexistant lorsque ceux-ci sont abondants, peut prendre des valeurs très élevées dès qu'un incident vient menacer la continuité des opérations de production, de transport et de transformation. Une fois résolues les difficultés nées de cet incident, le rendement de réserve redevient nul. Cette composante du rendement d'opportunité varie donc en fonction de la capacité des opérateurs à faire face, à chaque instant, à l'imprévu. Pour cette seconde raison, dans ces circonstances, le rendement d'opportunité est plus volatil.

Lorsque les stocks sont abondants, le "confort" associé à leur détention est en revanche peu élevé : le rendement d'opportunité tend vers une valeur nulle. De plus, le prix au comptant est caractérisé par une plus grande stabilité, et la continuité des opérations de production, de transport et de transformation de la matière première est garantie. Le rendement d'opportunité est stable. L'hypothèse formulée à partir de l'étude de la théorie du stockage est donc la suivante : le rendement d'opportunité a un comportement asymétrique. Il est élevé et volatil en situation de déport ; il est faible et stable en situation de report.

---

<sup>4</sup> Le processus est réversible dans le cas d'une activité de transport : il est possible de transférer un stock d'un lieu A à un lieu B, puis de B en A. En revanche, s'il est possible de transformer du blé en farine, l'inverse n'est pas vrai.

### 2.3. LA RELATION ENTRE LE PRIX AU COMPTANT ET LE PRIX A TERME

Cette étude permet de formuler la relation entre le prix au comptant et le prix à terme dans un marché de matière première stockable de la façon suivante :

$$F(t,T) - S(t) = C_S(t,T) - C_Y(t,T) \quad (1)$$

avec :  $C_Y(t,T) = A_I(t,T) + C_R(t,T)$

- où :
- $F(t,T)$  est le prix à terme en  $t$  du contrat parvenant à échéance en  $T$ ,
  - $S(t)$  est le prix au comptant en  $t$ ,
  - $C_S(t,T)$  est le coût de stockage entre  $t$  et  $T$ ,
  - $C_Y(t,T)$  est le rendement d'opportunité entre  $t$  et  $T$ ,
  - $A_I(t,T)$  est l'avantage associé à la détention de stocks en situation d'incertitude,
  - $C_R(t,T)$  est le coût de la rigidité des activités de production, de stockage, de transport et de transformation de la matière première.

Le coût de stockage  $C_S(t,T)$  correspond aux frais d'immobilisation de la marchandise. C'est une fonction croissante du taux d'intérêt et du niveau des stocks.

L'analyse des situations de report et de déport issue de la relation (1) est la suivante : en situation de pénurie de stocks, le coût de stockage  $C_S(t,T)$  est faible, tandis que le rendement d'opportunité  $C_Y(t,T)$  est élevé. L'avantage  $A_I(t,T)$  que présente la détention de stocks en situation d'incertitude, et le coût  $C_R(t,T)$  de la rigidité sont en effet une fonction inverse du niveau des stocks. Le rendement d'opportunité peut alors devenir supérieur au coût de stockage, de telle sorte que la base devienne négative. Dans ce cas, les opérations d'arbitrage sont limitées par le volume de stocks disponibles, le prix au comptant et le rendement d'opportunité sont volatils : la base est instable.

Lorsqu'en revanche les stocks sont abondants, le rendement d'opportunité  $C_Y(t,T)$  est proche de zéro, et le coût de stockage  $C_S(t,T)$  est élevé. La base est positive. De plus, elle est stable sous l'effet des opérations d'arbitrage entre le marché physique et le marché papier.

### 2.4. CONCLUSION

L'étude de la relation entre le prix au comptant et le prix à terme dans un marché de matières premières permet d'aboutir à certaines conclusions utiles à l'élaboration d'un modèle de structure par terme des prix. En premier lieu, elle permet d'identifier au moins deux variables explicatives du prix à terme<sup>5</sup> : le prix au comptant et le rendement d'opportunité net du coût de stockage. En second lieu, ces deux variables sont toutes deux une fonction inverse du niveau des stocks : elles sont positivement corrélées. Enfin, le prix au comptant comme le rendement d'opportunité sont élevés et instables en situation de déport, lorsque les stocks sont rares ; ils sont plus faibles et stables en situation de report, lorsque les stocks sont abondants.

---

<sup>5</sup> Une analyse plus fine permet en réalité de mettre en évidence l'existence d'une troisième variable explicative du prix à terme : le taux d'intérêt, qui détermine le coût de stockage. Dans le cadre de cet article, le taux d'intérêt est cependant supposé constant et n'est donc pas considéré comme une source d'incertitude affectant l'évolution du prix à terme. Schwartz a levé cette hypothèse en 1997 pour l'un de ses modèles.

## SECTION 3. LE MODELE ASYMETRIQUE

Le modèle asymétrique s'inspire à la fois des enseignements retirés de l'étude de la théorie du stockage et de ceux apportés par les travaux antérieurs sur les modèles de structure par terme des prix des matières premières. Ce modèle suppose que deux sources d'incertitude affectent l'évolution du prix à terme : le prix au comptant et le rendement d'opportunité, dont le comportement est asymétrique. Il constitue une généralisation de celui proposé par Schwartz en 1997. Avant de présenter le modèle lui-même, nous exposerons les hypothèses sur lesquelles il repose.

### 3.1. LES HYPOTHESES DU MODELE ASYMETRIQUE

Les hypothèses du modèle asymétrique sont au nombre de cinq :

H1. Les actifs sont traités sur des marchés sans frictions, sans taxes, ni coûts de transaction.

H2. Les échanges sont continus, de telle sorte que les opérateurs peuvent en permanence rééquilibrer leur portefeuille.

H3. Les taux de prêt et d'emprunt sont égaux.

H4. Les taux d'intérêt sont constants<sup>6</sup>.

H5. La dynamique des états peut être formulée de la façon suivante :

$$\begin{cases} dS = (\mu - \tilde{C})Sdt + \sigma_S S dz_S \\ d\tilde{C} = \left( \kappa(\alpha - C)(1 - \beta + \beta e^C) + \frac{1}{2} \beta e^C \sigma_C^2 \right) dt + (1 - \beta + \beta e^C) \sigma_C dz_C \end{cases} \quad (2)$$

avec :  $E[dz_S \times dz_C] = \rho dt$   
 $\kappa, \sigma_S, \sigma_C > 0$

- où :
- S est le prix au comptant,
  - $\tilde{C}$  est le rendement d'opportunité du modèle asymétrique,
  - C est le rendement d'opportunité du modèle de Schwartz,
  - $\mu$  est le rendement instantané anticipé pour S,
  - $\alpha$  est la moyenne à long terme de C,
  - $\kappa$  est la force de rappel de C vers  $\alpha$ ,
  - $\beta$  est le coefficient d'asymétrie associé à  $\tilde{C}$ ,
  - $\sigma_S$  est la volatilité de S,
  - $\sigma_C$  est la volatilité de C,
  - $dz_S$  est l'incrément du mouvement brownien associé à S,
  - $dz_C$  est l'incrément du mouvement brownien associé à C,
  - $\rho$  est le coefficient de corrélation unissant les deux browniens.

L'hypothèse H5 nécessite deux commentaires. En premier lieu, l'asymétrie du rendement d'opportunité est introduite en établissant une relation entre le rendement

<sup>6</sup> Formuler une telle hypothèse revient à considérer que les prix à terme sont égaux aux prix *forward*. Cette hypothèse, comme l'a montré Schwartz en 1997, peut s'avérer restrictive, en particulier lorsque l'analyse est menée pour des contrats à terme dont l'échéance est supérieure à deux ans. Cependant, cet article étant consacré à l'étude de l'asymétrie du rendement d'opportunité, il est possible, dans un premier temps au moins, de supposer que les taux d'intérêt sont constants, afin de simplifier l'analyse.

d'opportunité du modèle asymétrique et le rendement d'opportunité du modèle de Schwartz<sup>7</sup>. Cette relation est la suivante :

$$\tilde{C}(t) = (1 - \beta)C(t) + \beta e^{C(t)} \quad (3)$$

L'asymétrie est dans ce modèle mesurée par le paramètre  $\beta$ . Lorsque ce dernier est nul, le modèle asymétrique s'identifie au modèle de Schwartz.

En second lieu, le modèle asymétrique repose sur deux enseignements apportés par les travaux relatifs aux modèles de structure par terme : i) le prix au comptant et le rendement d'opportunité ne sont pas parfaitement corrélés ; ii) le prix au comptant et le rendement d'opportunité sont des variables à tendance centrale<sup>8</sup>.

La théorie du stockage montre que le prix au comptant et le rendement d'opportunité sont tous deux une fonction inverse du niveau des stocks. Ces deux variables sont donc positivement corrélées. Cependant, les travaux portant sur les modèles de structure par terme, en particulier ceux de Gibson et Schwartz (1989) montrent que cette corrélation n'est pas totale. A la suite de ces travaux, une seconde variable d'état est généralement ajoutée au prix au comptant : le rendement d'opportunité. Cet ajout permet d'obtenir des courbes de prix bien plus réalistes que ne l'autorise le modèle de Brennan et Schwartz (1985), dans lequel la seule variable explicative du prix à terme est le prix au comptant.

Sur le plan théorique, cette corrélation imparfaite peut être expliquée de la façon suivante : le confort apporté par la détention de stocks n'est pas toujours identique pour un niveau de prix au comptant donné. Il est en effet tout à fait envisageable qu'une variation du rythme de production, de transport ou de transformation d'une marchandise ait un impact sur le rendement d'opportunité sans pour autant se traduire immédiatement par une transaction sur le marché physique et donc par une modification du prix au comptant.

Conformément aux travaux de Schwartz (1997), nous introduisons de plus une tendance centrale dans la dynamique du rendement d'opportunité. L'hypothèse sous-tendant cette formalisation est qu'il existe un niveau moyen de stocks permettant de satisfaire les besoins de l'industrie vers lequel, à travers le comportement des opérateurs, le volume de stocks et donc le rendement d'opportunité ont tendance à converger. Lorsque le rendement d'opportunité est faible, les stocks sont abondants, et les opérateurs supportent un coût de stockage élevé au regard du confort apporté par la détention de marchandises. S'ils sont rationnels, ils auront tendance à se défaire de leurs marchandises excédentaires. Inversement, si le rendement d'opportunité est élevé, ils chercheront à reconstituer leurs stocks.

La même explication peut être invoquée pour introduire une tendance centrale dans la dynamique du prix au comptant. Dans le modèle asymétrique comme dans celui de Schwartz, la dynamique du prix au comptant intègre explicitement le rendement d'opportunité net des coûts de stockage. Ce dernier intervient comme un dividende stochastique et modifie la tendance du prix au comptant en lui donnant une dynamique qui ne correspond certes pas tout à fait à celle d'une tendance centrale, mais s'en rapproche cependant plus que celle retenue dans le modèle de Brennan et Schwartz.

<sup>7</sup> En retenant les notations utilisées pour le modèle asymétrique, la dynamique des états, dans le modèle à deux facteurs de Schwartz, est exprimée de la façon suivante :

$$\begin{cases} dS = (\mu - C)Sdt + \sigma_s S dz_s \\ dC = \kappa(\alpha - C)dt + \sigma_c dz_c \end{cases}$$

<sup>8</sup> Le terme "tendance centrale" correspond à celui de *mean reverting* de la littérature anglo saxonne.



### 3.2. PRESENTATION DU MODELE

La démarche présidant à l'élaboration du modèle est classique : la première étape consiste à définir les variables d'état et la dynamique qui leur est associée. Cette étape correspond à la formulation de l'hypothèse H5. Ensuite, sachant que le prix d'un contrat à terme est une fonction de ces variables d'état, du temps et de l'échéance du contrat considéré, l'application du lemme d'Itô permet d'obtenir le comportement dynamique du prix à terme. A ce stade, un raisonnement d'arbitrage et la construction d'un portefeuille de couverture permettent d'obtenir la prime de terme associée au modèle, pour aboutir à l'équation fondamentale de valorisation et à la solution de cette équation.

#### 3.2.1. Equation fondamentale de valorisation du modèle

L'application du lemme d'Itô permet, à partir de la dynamique des états du modèle asymétrique, d'obtenir son équation fondamentale de valorisation. Cette équation est la suivante<sup>9</sup> :

$$\boxed{\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sigma_s^2 S^2 F_{SS} + \frac{1}{2} \sigma_c^2 (1 - \beta + \beta e^C)^2 F_{\tilde{C}\tilde{C}} + \rho \sigma_s \sigma_c S (1 - \beta + \beta e^C) F_{S\tilde{C}} + (r - \tilde{C}) S F_S \\ & + \left[ \kappa (1 - \beta + \beta e^C) (\hat{\alpha} - C) + \frac{1}{2} \sigma_c^2 \beta e^C \right] F_{\tilde{C}} - F_\tau = 0 \end{aligned}} \quad (4)$$

avec  $\lambda = \lambda_c \sigma_c$  et  $\hat{\alpha} = \alpha - \frac{\lambda}{\kappa}$ .

où  $\lambda$  est la prime de risque associée au rendement d'opportunité.

La condition frontière associée à cette équation est :  $F(S, \tilde{C}, T, T) = S(T)$ . Cette condition représente le processus de convergence du prix à terme vers le prix au comptant à l'expiration du contrat à terme. Ce processus est lié à l'existence d'une procédure de livraison à l'échéance du contrat à terme. Si, à cette date, le prix à terme est différent du prix au comptant, des opérations d'arbitrage rétablissent immédiatement l'équilibre.

Enfin, l'application d'une méthode de type Feynman-Kack à cette équation permet d'obtenir une solution semi-analytique pour le modèle<sup>10</sup> :

$$\boxed{F(S, \tilde{C}, t, T) = S(t) \times A(\tau) \times e^{H(\beta-1)C(t)} \times E_t^Q \left[ e^{\left( \sigma_s \int_t^T dz_s(v) - (1-\beta) \int_t^T B(v) dv - \beta \int_t^T e^{D(v)+B(v)} dv \right)} \right]} \quad (5)$$

avec :  $\hat{\alpha} = \alpha - \frac{\lambda}{\kappa}$ ,  $H = \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa}$ ,  $A(\tau) = e^{\left( r - \frac{1}{2} \sigma_s^2 \right) \tau + \hat{\alpha} (1 - \beta) (H - \tau)}$ ,

$B(v) = \sigma_c e^{-\kappa v} \int_t^v e^{\kappa y} dz_c(y)$ ,  $D(v) = \hat{\alpha} + (C(t) - \hat{\alpha}) e^{-\kappa(v-t)}$

<sup>9</sup> La méthode utilisée pour obtenir cette équation est précisée en annexe 1 de ce texte.

<sup>10</sup> La méthode utilisée pour obtenir cette solution est précisée en annexe 2 de ce texte.

### 3.3. CONCLUSION

Trois points méritent d'être soulignés en conclusion de cette présentation : en premier lieu, le modèle asymétrique repose, tout comme ceux dont il s'inspire, sur des hypothèses fortes. Ensuite, pour tester correctement les performances des modèles de structure par terme des prix des matières premières, il est nécessaire de mettre en oeuvre des méthodes économétriques spécifiques. Enfin, le modèle asymétrique présente, au regard de ces tests empiriques, des difficultés spécifiques.

L'obtention de l'équation fondamentale d'un modèle de structure par terme des prix, ainsi que sa résolution, reposent sur des hypothèses fortes. En particulier, le raisonnement d'arbitrage permettant de déterminer l'équation fondamentale de valorisation suppose que l'on se trouve en situation de marchés complets, ce qui n'est pourtant pas le cas.

Ce raisonnement d'arbitrage est le suivant : dans un univers où les transactions sont réalisées en continu, et dans un marché complet, un actif contingent peut être répliqué par une combinaison d'actifs existants. Ces actifs doivent réunir certaines conditions<sup>11</sup>. En premier lieu, ils doivent être non redondants : chacun doit représenter une source de risque distincte affectant l'évolution du prix de l'actif contingent. De plus, ils doivent être suffisamment échangés pour que l'on puisse les considérer comme évalués en l'absence de toute opportunité d'arbitrage. Sous ces conditions, ces actifs peuvent alors constituer un portefeuille de couverture répliquant l'actif contingent, leurs proportions respectives étant déterminées de telle sorte que la stratégie soit non risquée, et que la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage soit respectée.

En adoptant une méthode similaire à celle employée par Black et Scholes (1973) pour valoriser le prix d'une option d'achat sur action, le portefeuille de couverture utilisé pour répliquer le prix d'un contrat à terme de matière première devrait être composé, dans le cas d'un modèle monofactoriel comme celui de Brennan et Schwartz (1985), d'une position sur l'actif sous-jacent (la matière première), d'une position sur l'actif contingent (le contrat à terme) et d'une position sur l'actif sans risque. Cependant, les marchés physiques de matières premières n'étant pas parfaitement arbitrés, l'actif sous-jacent peut difficilement être considéré dans ce cas comme évalué en l'absence d'opportunité d'arbitrage. Pour contourner cette difficulté, la position sur le marché physique est remplacée par une position sur un contrat à terme. Cette solution n'est acceptable que si le contrat est suffisamment échangé, et son prix fortement corrélé au prix au comptant de la matière première. Dès lors, le portefeuille de couverture est composé de deux positions sur le marché à terme ; la position sur l'actif sans risque disparaît, car l'investissement dans un contrat à terme peut être considéré comme nul, exception faite du dépôt.

Supposer que deux variables - le prix au comptant et le rendement d'opportunité - peuvent expliquer le comportement dynamique du prix à terme fait surgir une seconde difficulté : le rendement d'opportunité ne correspond en effet à aucun actif réellement échangé. Pour représenter l'incertitude qui lui est associée, la seule solution envisageable consiste à prendre une position sur le marché à terme. Un actif de même nature (un contrat à terme) est donc utilisé pour assurer une protection contre deux sources de risque distinctes, ce qui semble contraire à la condition de non redondance exposée ci-dessus. Pour pouvoir être considérés comme non redondants, ces deux contrats à terme doivent avoir des échéances

---

<sup>11</sup> Les remarques concernant les conditions requises pour que les actifs composant le portefeuille de couverture permettent effectivement de répliquer l'actif contingent, et pour que les équations fondamentales de valorisation des modèles de structure par terme des prix puissent être résolues à l'aide d'une solution de type Feynman-Kac, en considérant que la probabilité risque-neutre est unique, sont dues au professeur Hélyette Geman.

suffisamment éloignées l'une de l'autre. Ils doivent de plus être suffisamment échangés pour être considérés comme évalués en l'absence d'opportunité d'arbitrage.

L'exposé de ce premier point permet de souligner une seconde difficulté liée à l'application empirique des modèles de structure par terme des prix des matières premières. Cette difficulté provient du caractère non observable des variables d'état utilisées. Comme cela vient d'être évoqué, le rendement d'opportunité ne correspond à aucun actif réellement échangé. De plus, dans la plupart des marchés de matières premières, il n'existe pas de séries statistiques fiables pour le prix au comptant. L'introduction de ces deux variables dans un modèle de structure par terme nécessite donc le choix d'une méthode de reconstitution de séries de données temporelles. Fréquemment, le prix au comptant est identifié au prix à terme rapproché, tandis que le rendement d'opportunité net des coûts de stockage est estimé, à une date  $t$ , à partir de la relation entre prix au comptant et prix à terme issue du modèle de Brennan et Schwartz (1985)<sup>12</sup>. Ce sont cependant des approximations, et des méthodes plus précises peuvent être requises pour améliorer les performances du modèle. Schwartz (1997) utilise par exemple un filtre de Kalman simple pour reconstituer les séries de prix au comptant et de rendement d'opportunité.

Les caractéristiques du modèle asymétrique sont cependant telles que cette méthode ne peut être utilisée. Ce modèle présente en effet, sur le plan pratique, une différence importante par rapport à celui de Schwartz : la dynamique des états n'est pas linéaire. Ceci exclut l'utilisation d'un filtre de Kalman simple<sup>13</sup>. De plus, contrairement au modèle de Schwartz, le modèle asymétrique ne comporte qu'une solution semi-analytique. Les prix à terme théoriques issus de ce modèle doivent donc être simulés numériquement.

#### SECTION 4. LE FILTRE DE KALMAN ETENDU

Pour tester l'hypothèse d'asymétrie du rendement d'opportunité et apprécier les performances du modèle asymétrique, il est nécessaire d'estimer les paramètres de ce modèle et de reconstituer des séries temporelles pour les deux variables d'état (le prix au comptant et le rendement d'opportunité) qui lui sont associées. Dans cet objectif, un filtre de Kalman étendu, adapté aux modèles non linéaires, est développé. Avant de présenter cette méthode et son application au modèle asymétrique, nous en exposerons les principes généraux<sup>14</sup>.

<sup>12</sup> La solution du modèle de Brennan et Schwartz est la suivante :

$$F(S, t, T) = Se^{(r-c)\tau}$$

- où :
- $F(S, t, T)$  est le prix à terme pour l'échéance  $T$ , à la date  $t$ ,
  - $S$  est le prix au comptant,
  - $c$  est le rendement d'opportunité, supposé constant,
  - $r$  est le taux d'intérêt sans risque,
  - $\tau$  est la maturité.

En utilisant deux prix à terme d'échéance rapprochées  $T_1$  et  $T_2$ , il est possible de calculer la valeur du rendement d'opportunité à une date  $t$  :

$$c = r - \frac{\ln(F(S, t, T_1)) - \ln(F(S, t, T_2))}{T_1 - T_2}$$

<sup>13</sup> Plus précisément, l'utilisation d'un filtre de Kalman simple requiert la présence d'une linéarité à deux niveaux : la dynamique des états, ainsi que la relation entre le prix à terme et les variables d'état. Dans le modèle de Schwartz cependant, la relation associant le prix à terme aux variables d'état n'est pas, à l'origine, linéaire. C'est en exprimant cette relation sous forme logarithmique que Schwartz peut utiliser un filtre de Kalman simple. Cette manipulation n'est cependant pas sans impact sur les résultats de l'estimation, comme nous le verrons ensuite.

<sup>14</sup> Pour la présentation et l'application du filtre de Kalman simple, le lecteur est invité à se référer aux textes de Schwartz (1997), Harvey (1989) et Anderson et Moore (1979), et Roncalli (1995).

#### 4.1. PRINCIPES GENERAUX DE LA METHODE DU FILTRE DE KALMAN

Le filtre de Kalman utilise des séries temporelles de données observées  $y_t$  pour reconstituer, à partir de la relation établie entre ces données et le vecteur des états  $\alpha_t$ , des séries temporelles pour ces variables non observables. Dans le cadre des modèles de structure par terme, les données observées  $y_t$  sont des séries temporelles de prix à terme pour différentes maturités, et le vecteur des états  $\alpha_t$  est constitué de deux éléments : le prix au comptant et le rendement d'opportunité.

Pour utiliser un filtre de Kalman, il est dans un premier temps nécessaire d'exprimer le modèle considéré sous la forme espace-états. Un modèle espace-états est caractérisé par une équation de mesure et une équation de transition. L'équation de mesure est obtenue en ajoutant des perturbations, qui ne sont corrélées ni sériellement ni transversalement, à la relation entre les variables observées et les variables non observables. Ces perturbations, de moyenne nulle, représentent tous les événements susceptibles de générer des erreurs dans les données. Dans le cadre de modèles de structure par terme des prix des matières premières, elles désignent par exemple la présence de limites lorsque les fluctuations de prix sur le marché à terme sont très importantes, les erreurs introduites dans les séries de données, etc. L'équation de transition correspond à l'expression en temps discret de la dynamique des variables d'état.

Le filtre de Kalman permet de calculer de façon récursive l'estimateur du vecteur des états à la date  $t$  compte tenu de l'information disponible à cette date, et de mettre à jour continuellement ce vecteur au fur et à mesure que de nouvelles informations deviennent disponibles. Enfin, lorsque les perturbations et le vecteur des états sont normalement distribués, la fonction de vraisemblance associée à chaque observation  $y_t$  peut être calculée, ce qui permet d'estimer les paramètres du modèle étudié. Ces paramètres, dans le cas du modèle asymétrique, ne dépendent pas du temps.

#### 4.2. PRESENTATION DU FILTRE DE KALMAN ETENDU

Lorsque le modèle étudié ne présente pas les caractéristiques de linéarité requises pour appliquer un filtre de Kalman simple, il faut avoir recours à une version généralisée : le filtre de Kalman étendu. Ce dernier est beaucoup moins fréquemment employé que le filtre de Kalman simple. A notre connaissance, il n'a pas encore été utilisé dans le domaine financier.

Un estimateur optimal des variables d'état ne peut généralement pas être obtenu avec un filtre de Kalman étendu. Un filtre approximatif doit donc être élaboré en linéarisant le modèle.

Dans le cas non linéaire, les équations de transition et de mesure du modèle espace-états sont les suivantes :

$$\text{Equation de transition : } \alpha_t = T(\alpha_{t-1}) + R(\alpha_{t-1})\eta_t \quad (6)$$

où  $\alpha_t$  est le vecteur des états à la date  $t$ , de dimension  $m$ ,  $T(\alpha_{t-1})$  et  $R(\alpha_{t-1})$  dépendent des valeurs des variables d'état en  $(t-1)$ .

$$\text{Equation de mesure : } y_t = Z(\alpha_t) + \varepsilon_t \quad (7)$$

où  $y_t$  est une série temporelle multivariée  $N \times 1$  et  $Z(\alpha_t)$  est une fonction non linéaire des variables d'état. Comme dans le cas du filtre de Kalman simple, les deux processus  $\varepsilon_t$  et  $\eta_t$  sont considérés comme normalement distribués, de moyenne nulle et de matrices de covariances respectives  $H$  et  $Q$  :

$$E[\varepsilon_t] = 0 \text{ et } \text{Var}[\varepsilon_t] = H$$

$$E[\eta_t] = 0 \text{ et } \text{Var}[\eta_t] = Q$$

La position initiale du système est telle que :  $E(\alpha_0) = a_0$  et  $\text{Var}(\alpha_0) = P_0$ . Si  $a_t$  est un estimateur non biaisé de  $\alpha_t$  compte tenu de l'observation disponible à la période  $t$ ,  $E_t[\alpha_t - a_t] = 0$ . Par conséquent, la matrice de covariance  $P_t$  associée à  $a_t$  est définie par la relation suivante :  $P_t = E_t[(a_t - \alpha_t)(a_t - \alpha_t)']$ .

En considérant que les fonctions  $Z(\alpha_t)$  et  $T(\alpha_{t-1})$  sont suffisamment lisses, il est possible de calculer leur développement de Taylor au voisinage de l'espérance conditionnelle  $a_{t/t-1}$  et de  $a_t$ . La version linéarisée du modèle sous forme espace-états est dans ce cas exprimée de la façon suivante :

$$\alpha_t \approx \hat{T}\alpha_{t-1} + \hat{R}\eta_t \quad (8)$$

$$y_t \approx \hat{Z}\alpha_t + \varepsilon_t \quad (9)$$

où  $\hat{Z}$  et  $\hat{T}$  sont respectivement les dérivées des fonctions  $Z(\alpha_t)$  et  $T(\alpha_{t-1})$  par rapport aux variables d'état :

$$\hat{Z} = \left. \frac{\delta Z(\alpha_t)}{\delta \alpha_t'} \right|_{\alpha_t = a_{t/t-1}} \quad \hat{T} = \left. \frac{\delta T(\alpha_{t-1})}{\delta \alpha_{t-1}'} \right|_{\alpha_t = a_{t-1}} \quad \hat{R} = R(a_{t-1}) \approx R(\alpha_{t-1})$$

A chaque itération, trois étapes sont successivement abordées dans le cadre du filtre de Kalman étendu. La première consiste à prédire les valeurs des variables d'état à la date  $t$  en fonction de leur valeur en  $(t-1)$ . Cette étape correspond à la phase de prédiction :

$$\text{- phase de prédiction : } \begin{cases} a_{t/t-1} = T(a_{t-1}) \\ P_{t/t-1} = \hat{T}P_{t-1}\hat{T}' + \hat{R}Q\hat{R}' \end{cases} \quad (10)$$

où  $a_{t/t-1}$  et  $P_{t/t-1}$  sont les estimateurs de  $\alpha_t$  et de  $P_t$  conditionnellement à l'information disponible à la période  $(t-1)$ .

La seconde étape permet de calculer l'innovation  $v_t$  correspondant à la différence, constatée en  $t$ , entre prix à terme théoriques calculés  $\tilde{y}_{t/t-1}$  et prix à terme observés  $y_t$ .

$$\text{- phase d'innovations : } \begin{cases} \tilde{y}_{t/t-1} = Z(a_{t/t-1}) \\ v_t = y_t - \tilde{y}_{t/t-1} \\ F_t = \hat{Z}_t P_{t/t-1} \hat{Z}_t' + H \end{cases} \quad (11)$$

où  $\tilde{y}_{t/t-1}$  est l'estimation de  $y_t$  conditionnellement à l'information disponible en  $(t-1)$ , et  $v_t$  est le processus d'innovation, de matrice de covariance  $F_t$ .

La troisième étape met à jour les variables d'état compte tenu de l'information apportée par l'innovation  $v_t$ . Ces valeurs constitueront les valeurs initiales des variables d'état au cours de la première phase de l'itération suivante :

$$\text{- phase de mise à jour : } \begin{cases} a_t = a_{t/t-1} + P_{t/t-1} \hat{Z}_t' F_t^{-1} v_t \\ P_t = \left( I - P_{t/t-1} \hat{Z}_t' F_t^{-1} \hat{Z}_t \right) P_{t/t-1} \end{cases} \quad (12)$$

Dans le cas étudié, les fonctions  $Z(\alpha_t)$ ,  $T(\alpha_{t-1})$  et  $R(\alpha_{t-1})$ , ainsi que les matrices de covariance  $H$  et  $Q$  sont invariantes dans le temps.  $Z(\alpha_t)$ ,  $T(\alpha_{t-1})$  et  $R(\alpha_{t-1})$  sont les fonctions du système.  $H$  et  $Q$  sont les matrices du système.

#### 4.3. APPLICATION DU FILTRE DE KALMAN ETENDU AU MODELE ASYMETRIQUE

Pour utiliser le filtre de Kalman étendu, le modèle asymétrique doit être exprimé sous forme espace-états. En conservant les notations utilisées pour l'équation (7), l'équation de mesure associée au modèle asymétrique est la suivante :

$$y_t = Z(S_t, C_t) + \varepsilon_t \quad (13)$$

où :

–  $y_t$  est un vecteur de variables observables, de dimension  $(N \times 1)$ . Dans le cas étudié, les variables observables sont des prix à terme pour différentes échéances,  $N$  correspondant au nombre de maturités retenues.

–  $Z(S_t, C_t)$  est une matrice de dimension  $(N \times m)$ , dont la ligne  $i$  correspond à l'expression :

$$Z(S_t, C_t) = [S_t \times A(\tau_i) \times \exp(H(\beta - 1)C_t) \times E_t[\exp(\sigma_S Z_S(\tau_i) - (1 - \beta)W(\tau_i) - \beta V(\tau_i))]]$$

$$\text{avec : } i = 1, \dots, N, \quad H = \frac{1 - e^{-\kappa \tau_i}}{\kappa}, \quad A(\tau_i) = \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma_S^2\right)\tau_i + \hat{\alpha}(1 - \beta)(H - \tau_i)\right)$$

$$Z_S(\tau_i) = \int_t^{\tau_i} dz_S(y) \quad W(\tau_i) = \int_t^{\tau_i} B(v)dv = \int_t^{\tau_i} \sigma_c e^{-\kappa v} \left( \int_t^v e^{\kappa y} dz_c(y) \right) dv$$

$$V(\tau_i) = \int_t^{\tau_i} \exp(B(v) + D(v))dv = \int_t^{\tau_i} \exp\left(\hat{\alpha} + (C(t) - \hat{\alpha})e^{-\kappa(v-t)} + \sigma_c e^{-\kappa v} \left( \int_t^v e^{\kappa y} dz_c(y) \right)\right) dv$$

où  $v < T$ .

L'équation de transition est obtenue à partir de l'expression en temps discret de la dynamique des états du modèle. En conservant les notations de l'équation (6), cette équation de transition est donc :

$$\begin{bmatrix} S_t \\ C_t \end{bmatrix} = T(S_{t-1}, C_{t-1}) + R(S_{t-1}, C_{t-1})\eta_t$$

où :

–  $\begin{bmatrix} S_t \\ C_t \end{bmatrix}$  est le vecteur des états de dimension  $(m \times 1)$ , avec  $m = 2$

–  $T(S_{t-1}, C_{t-1})$  est un vecteur de dimension  $(m \times 1)$ <sup>15</sup> :

<sup>15</sup> Par rapport aux travaux de Schwartz (1997), une modification est ici introduite dans l'utilisation du filtre de Kalman. La dynamique des états est en effet ici exprimée sous probabilité risque neutre, alors que Schwartz travaillait sous probabilité historique. Du point de vue de l'estimation, cette modification permet de réduire de huit à six le nombre de paramètres associés au modèle asymétrique : la tendance  $\mu$  de la dynamique du prix au comptant disparaît, ainsi que la prime de risque  $\lambda$  associée au rendement d'opportunité. Par conséquent, ce n'est plus le paramètre de valeur moyenne à long terme  $\alpha$  qui est estimé, mais un  $\alpha$  corrigé du risque :  $\hat{\alpha} = \alpha - \frac{\lambda}{\kappa}$ .

Cette diminution du nombre de paramètres facilite grandement la procédure d'optimisation, au prix d'une moindre information quant à la valeur de la prime de risque associée au rendement d'opportunité, et de la moyenne à long terme, qui n'apparaissent plus que de façon implicite.

$$T(S_{t-1}, C_{t-1}) = \begin{bmatrix} S_{t-1} + S_{t-1}\Delta t(r - ((1-\beta)C_{t-1}) - \beta e^{C_{t-1}}) \\ C_{t-1} + \kappa(\hat{\alpha} - C_{t-1})\Delta t \end{bmatrix}$$

–  $R(S_{t-1}, C_{t-1})$  est une matrice de dimension  $(m \times m)$  :

$$R(S_{t-1}, C_{t-1}) = \begin{bmatrix} S_{t-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

–  $Var(\eta_t) = \begin{bmatrix} \sigma_s^2 & \rho\sigma_s\sigma_c \\ \rho\sigma_s\sigma_c & \sigma_c^2 \end{bmatrix}$  est une matrice de dimension  $(m \times m)$ .

Enfin, les dérivées des fonctions  $T(S_{t-1}, C_{t-1})$  et  $Z(S_t, C_t)$  par rapport aux variables d'état, respectivement  $\hat{T}$  et  $\hat{Z}$ , sont exprimées de la façon suivante :

–  $\hat{T}$  est une matrice de dimension  $(m \times m)$  :

$$\hat{T} = \begin{bmatrix} 1 + \Delta t(r - ((1-\beta)C_{t-1}) - \beta e^{C_{t-1}}) & -((1-\beta)S_{t-1}\Delta t) - (\beta S_{t-1}e^{C_{t-1}}\Delta t) \\ 0 & 1 - \kappa\Delta t \end{bmatrix}$$

–  $\hat{Z}$  est une matrice de dimension  $(m \times N)$ . La ligne  $i$  de cette matrice correspond à l'expression :

$$\hat{Z} = [f_A(\tau_i)E_t[X(\tau_i)], \quad S_t \times f_A(\tau_i) \times (H(\beta-1)E_t[X(\tau_i)] + E_t[X(\tau_i)])]$$

avec  $i = 1, \dots, N$ .

où :

–  $f_A(\tau_i) = A(\tau_i) \times \exp(H(\beta-1)C_t)$

–  $E_t[X(\tau_i)] = E_t[\exp(\sigma_s Z_s(\tau_i) - (1-\beta)W(\tau_i) - \beta V(\tau_i))]$

–  $E_t'[X(\tau_i)]$  est la dérivée de l'espérance par rapport à  $C$ , qui s'écrit :

$$E_t'[X(\tau_i)] = E_t \left[ \exp \left( \sigma_s Z_s(\tau_i) - (1-\beta)W(\tau_i) - \beta \int_t^{\tau_i} (\exp(-\kappa v) \exp(B(v) + D(v))) dv \right) \right]$$

#### 4.4. ESTIMATION DES PARAMETRES A L'AIDE DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

Lorsque les perturbations et le vecteur des variables d'état sont normalement distribués, le filtre de Kalman (simple ou étendu) peut être utilisé pour estimer les paramètres du modèle étudié. Pour cela, à chaque itération du filtre de Kalman, le logarithme de la fonction de vraisemblance associé à l'observation  $y_t$  est calculé :

$$\log l(t) = -\left(\frac{n}{2}\right) \times \ln(2\Pi) - \frac{1}{2} \ln(dF_t) - \frac{1}{2} v_t' \times F_t^{-1} \times v_t \quad (15)$$

---

L'expression en univers risque neutre de la dynamique des états est acceptable, dans la mesure où aucune série temporelle des variables d'état n'est disponible (donc n'est utilisée) pour l'optimisation. Afin de rendre comparables les résultats obtenus avec le modèle asymétrique et le modèle de Schwartz, cette modification a été reportée dans le filtre de Kalman simple. Ceci réduit dans ce cas de sept à cinq le nombre de paramètres à optimiser et améliore, par ailleurs, les performances du modèle de Schwartz.

où  $v_t$  est l'innovation à la date  $t$ ,  $F_t$  est la matrice de covariance qui lui est associée, et  $dF_t$  est le déterminant de la matrice  $F_t$ .

#### 4.5. CONCLUSION

Avant d'aborder les tests empiriques, soulignons que l'application du modèle asymétrique conduit à réaliser, par rapport au modèle de Schwartz, deux approximations. En premier lieu, les prix à terme théoriques du modèle asymétrique doivent être calculés numériquement<sup>16</sup>. En second lieu, le filtre de Kalman étendu conduit à linéariser la fonction associant le prix à terme aux variables d'état. Cette linéarisation constitue la principale distinction entre le filtre de Kalman étendu et le filtre de Kalman simple. Ces deux approximations agissent en défaveur du modèle asymétrique.

### SECTION 5. LES TESTS SUR LE MARCHE DU PETROLE BRUT

Dans le but de tester l'hypothèse d'asymétrie du rendement d'opportunité, les performances du modèle de Schwartz et du modèle asymétrique sont évaluées sur le marché du pétrole brut. Ces performances sont appréciées en fonction de la capacité d'un modèle à représenter les prix à terme observés.

#### 5.1. LES DONNEES UTILISEES

Les données utilisées sont celles du NYMEX<sup>17</sup>, pour le contrat de pétrole brut West Texas Intermediate (WTI), entre le 29 septembre 1995 et le 11 mai 1998. Elles ont été traitées de telle sorte que le premier prix à terme corresponde effectivement à une maturité de un mois ( $\tau_1$ ), que le second corresponde à une maturité de deux mois ( $\tau_2$ ), etc. Ces données, à l'origine quotidiennes, ont été transformées en données hebdomadaires en retenant la première observation de chaque série de cinq. Pour les estimations des paramètres et la reconstitution de séries de données non observables, quatre séries de prix à terme correspondant aux échéances de un mois, trois mois, six mois et neuf mois ont été sélectionnées.

Les taux d'intérêt choisis pour les tests empiriques sont ceux des bons du Trésor américain à trois mois. Le taux d'intérêt étant supposé constant dans les deux modèles étudiés, une moyenne de ces observations a été réalisée.

#### 5.2. ETUDE PREALABLE DU MODELE ASYMETRIQUE

Pour le modèle asymétrique, six paramètres optimaux doivent être déterminés<sup>18</sup>. Ceci, associé à la nécessité de simuler les prix à terme au lieu de les calculer analytiquement, rend la procédure d'optimisation plus longue que dans le cas du filtre de Kalman simple.

Préalablement à l'optimisation, un test portant sur le coefficient d'asymétrie  $\beta$  est réalisé. L'étude de la fonction de distribution du rendement d'opportunité, réalisée à l'aide d'une méthode Monte Carlo, permet de montrer que la fonction de distribution de  $\tilde{C}$  devient très rapidement asymétrique lorsque  $\beta$  augmente (figure 1). Cette constatation, associée au fait

---

<sup>16</sup> Pour calculer numériquement les prix à terme théoriques associés au modèle asymétrique, la solution semi-analytique doit être manipulée. Les modifications apportées à cette solution sont présentées en annexe trois.

<sup>17</sup> New York Mercantile EXchange.

<sup>18</sup> Confere note n°15.



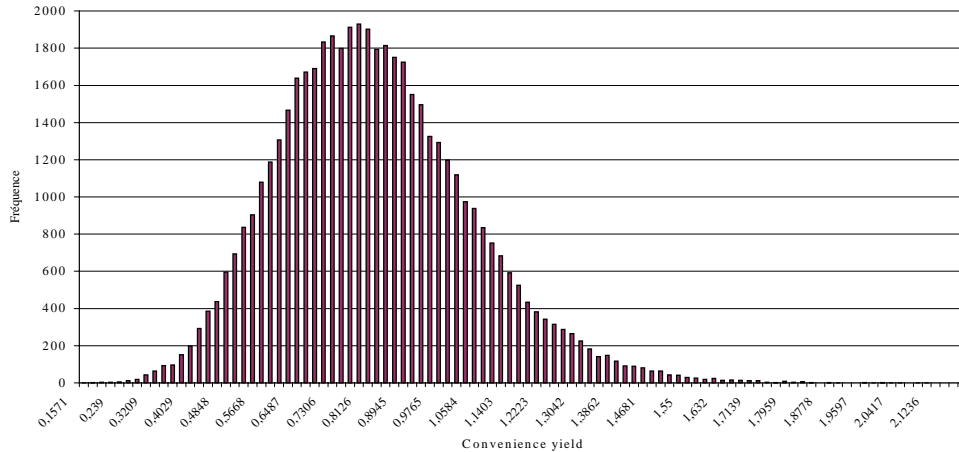
que la valeur du rendement d'opportunité s'élève rapidement lorsque l'asymétrie augmente, permet de supposer que la valeur optimale de  $\beta$  est proche de 0,1.

**Figure 1. Fonction de distribution de  $\tilde{C}$  pour  $\beta = 0,8$**

$C(0) = 0$  ;  $\kappa = 1,6$  ;  $\alpha = 0,1$  ;  $\lambda = 0,09$  ;  $\sigma_C = 0,6$  ; maturité : 2 mois

Longueur du pas de discrétisation : 1/800 ; Nombre d'intervalles de discrétisation : 133

Nombre de trajectoires simulées : 50 000



### 5.3. COMPARAISON DES PERFORMANCES DES MODELES

Les comparaisons portent sur les performances du modèle de Schwartz avec un filtre de Kalman simple et sur celles du modèle asymétrique, avec un filtre de Kalman étendu et 100 simulations par prix à terme.

#### 5.3.1. Paramètres optimaux pour chaque modèle

Les valeurs des paramètres optimaux pour chacun des modèles sont reproduites au tableau 1.

Les paramètres obtenus sont relativement différents pour chacun des modèles. La valeur de la force de rappel semble faible pour le modèle asymétrique ; le temps de retour vers sa valeur moyenne semble donc relativement long pour le rendement d'opportunité, ce qui serait cohérent avec un ajustement relativement lent des stocks aux mouvements du prix au comptant sur le marché physique. De plus, la valeur moyenne corrigée du risque est négative dans le cas du modèle asymétrique. Ce résultat n'est pas surprenant. Il correspond en effet à des valeurs sensiblement proches l'une de l'autre pour l'espérance des rendements d'opportunité de chaque modèle.

La volatilité du rendement d'opportunité semble en revanche élevée pour le modèle de Schwartz, et peu élevée pour le modèle asymétrique. Par ailleurs, le coefficient de corrélation est très élevé dans le modèle de Schwartz (ce qui était également le cas dans les travaux de Schwartz, quoique de façon légèrement moins prononcée). Ceci laisserait presque douter de la pertinence de l'introduction du rendement d'opportunité comme seconde variable d'état. La plus faible valeur obtenue pour ce paramètre dans le cas du modèle asymétrique est à cet égard plus satisfaisante. Enfin, et ceci est certainement le plus important, la valeur du coefficient d'asymétrie est non nulle, proche de 0,1 comme l'avaient laissé penser les tests préalables, ce qui tend à confirmer l'hypothèse d'asymétrie du rendement d'opportunité.

Remarquons enfin que ces résultats doivent être confirmés sur d'autres périodes, pour d'autres maturités. Les travaux réalisés par Schwartz montrent en effet que les paramètres varient en fonction de ces deux éléments.

**Tableau 1. Paramètres optimaux**

	Modèle de Schwartz		Modèle asymétrique	
	Paramètres	Gradient	Paramètres	Gradient
<b>Force de rappel : <math>\kappa</math></b>	2,9424	-0,0002	0,4463	0,0010
<b>Volatilité de S : <math>\sigma_S</math></b>	0,2854	-0,0031	0,1946	-0,0043
<b>Valeur moyenne corrigée du risque <math>\hat{\alpha}</math></b>	0,0363	-0,0020	-0,2611	0,0002
<b>Volatilité de C : <math>\sigma_C</math></b>	0,6241	0,0013	0,1251	0,0014
<b>Coefficient de corrélation : <math>\rho</math></b>	0,9999	-0,0000	0,7271	-0,0002
<b>Coefficient d'asymétrie : <math>\beta</math></b>	–	-	0,0858	-0,0004

### 5.3.2. Critères de performances

Pour analyser les performances des modèles, deux critères sont retenus : les erreurs de prix moyennes (*Mean Pricing Errors*) et la racine de la moyenne des carrés des erreurs (*Root Mean Squared Errors*).

La définition des erreurs de prix moyennes (MPE) exprimée en USD, est la suivante :

$$MPE = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \hat{F}_{\tau,n} - F_{\tau,n}$$

où N est le nombre d'observations,  $\hat{F}_{\tau}$  est le prix à terme théorique de maturité  $\tau$  issu de chaque modèle, et  $F_{\tau}$  est le prix à terme de maturité  $\tau$  observé. L'erreur de prix moyenne mesure le biais d'estimation. Si cette dernière est correcte, l'erreur de prix moyenne doit être très proche de zéro.

En retenant les mêmes notations, la racine de la moyenne des carrés des erreurs (RMSE), exprimée en USD, est calculée pour chaque maturité de la façon suivante :

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\hat{F}_{\tau,n} - F_{\tau,n})^2}$$

Le RMSE est une variance empirique, calculée en supposant que les estimations sont non biaisées. Elle permet de mesurer la qualité des estimations en terme de stabilité. Ce critère est considéré comme le plus représentatif des deux : les erreurs de prix peuvent en effet se compenser de telle sorte que l'erreur de prix moyenne soit faible malgré la présence d'écarts importants.

### 5.3.3. Résultats empiriques :

Les performances obtenues pour le modèle de Schwartz appellent un certain nombre de commentaires : dans ce cas en effet, les innovations sont calculées à partir du logarithme des observations<sup>19</sup>. Ceci introduit une difficulté lors de la reconstitution des données estimées.

<sup>19</sup> Cf note n° 13.

La relation entre le logarithme des estimations  $\tilde{y}_{t/t-1}$  et le logarithme des observations  $y_t$  est en effet la suivante :

$$y_t = \tilde{y}_{t/t-1} + \sigma R$$

où  $\sigma$  est l'écart type des innovations et  $R$  est un résidu gaussien. En toute rigueur, lorsque l'on passe des logarithmes des observations aux observations elles-mêmes, la relation entre  $y_t$  et  $\tilde{y}_{t/t-1}$  devient :

$$e^{y_t} = e^{\tilde{y}_{t/t-1}} \times e^{\sigma R}$$

L'espérance de l'exponentielle des observations est alors<sup>20</sup> :

$$E[e^{y_t}] = E[e^{\tilde{y}_{t/t-1}}] \times e^{\frac{\sigma^2}{2}}$$

Ainsi, lors de l'application du filtre de Kalman simple au modèle de Schwartz, pour restituer des prix estimés qui soient des estimateurs sans biais des prix observés, il faudrait associer un terme correctif à l'exponentielle des estimations. L'introduction de cette correction est cependant délicate, la variance des innovations étant modifiée dès que les paramètres le sont. Pour pallier cette difficulté, nous avons choisi de ne pas corriger les exponentielles des estimations, nous rapprochant ainsi de la procédure utilisée par Schwartz (1997) : pour apprécier les performances de son modèle, celui-ci compare en effet le logarithme des observations au logarithme des estimations. Il considère donc implicitement que la valeur de  $\sigma$ , dans l'équation ci-dessus, est suffisamment faible pour que le passage aux prix réels puisse être effectué sans introduire de terme correctif sur les estimations.

Pour les jeux de paramètres optimaux reproduits au tableau 1, les performances du modèle de Schwartz et du modèle asymétrique sont les suivantes :

**Tableau 2. Résultats des estimations, période 1995-1998**

Maturité	Modèle de Schwartz		Modèle asymétrique	
	MPE	RMSE	MPE	RMSE
<b>1 mois</b>	-0,2976	1,0895	-0,1257	0,8865
<b>3 mois</b>	-0,1625	0,7447	-0,0386	0,5193
<b>6 mois</b>	-0,0889	0,5451	-0,0784	0,3511
<b>9 mois</b>	-0,0269	0,4018	-0,0717	0,4010
<b>Moyenne</b>	<b>-0,1440</b>	<b>0,6953</b>	<b>-0,0786</b>	<b>0,5395</b>

Pour les deux modèles, les performances s'améliorent avec la maturité. Le modèle asymétrique se révèle plus performant que celui de Schwartz, pour toutes les maturités, bien que l'écart entre les deux modèles se réduise fortement pour la maturité de neuf mois, et bien que deux approximations agissant en la défaveur du modèle asymétrique aient été réalisées.

## SECTION 6. CONCLUSION

Cet article propose, à partir de l'étude de la théorie du stockage, l'hypothèse selon laquelle le comportement du rendement d'opportunité, dans un marché de matières premières, est asymétrique : le rendement d'opportunité est élevé et volatil en situation de déport, lorsque les stocks sont rares ; inversement, lorsque les stocks sont abondants, il est faible et stable.

<sup>20</sup>  $e^{\tilde{y}_{t/t-1}}$  et  $e^{\sigma R}$  sont indépendantes l'une de l'autre.

Ce type d'approche a également été utilisé par Brennan (1991) et par Routledge, Seppi et Chester (2000). Brennan suppose cependant, contrairement à l'argumentation exposée dans cet article, que le rendement d'opportunité n'est pas stochastique. De plus, dans le modèle de Routledge, Seppi et Chester, l'asymétrie du comportement du rendement d'opportunité est représentée par une corrélation entre le prix au comptant et le rendement d'opportunité plus importante en situation de déport qu'en situation de report. Dans ce cas, le rendement d'opportunité est une variable endogène, déterminée par le processus de stockage, et non une variable exogène, comme c'est le cas dans cet article.

L'hypothèse d'asymétrie du rendement d'opportunité est utilisée pour élaborer un nouveau modèle de structure par terme des prix, inspiré de celui proposé par Schwartz en 1997. Ce modèle comporte deux variables d'état, positivement corrélées : le prix au comptant et le rendement d'opportunité. La dynamique du rendement d'opportunité, conformément aux travaux de Schwartz, est caractérisée par la présence d'une tendance centrale. Elle modifie de plus la dynamique du prix au comptant, le rendement d'opportunité agissant comme un dividende stochastique. Enfin, le rendement d'opportunité, dans ce modèle, a un comportement asymétrique.

Pour tester les performances du modèle asymétrique, une nouvelle méthode économétrique, le filtre de Kalman étendu, a été élaborée. Cette méthode présente l'avantage, par rapport au filtre de Kalman simple utilisé par Schwartz en 1997, de pouvoir être appliquée à des modèles non linéaires.

La comparaison des performances du modèle asymétrique et de celui de Schwartz sur le marché du pétrole brut permet de montrer que le modèle asymétrique, pour une période comprise entre le 1<sup>er</sup> avril 1991 et le 11 mai 1998, est plus performant sur toutes les maturités étudiées et que le coefficient d'asymétrie est non nul. Une amélioration est donc apportée à la compréhension de la relation entre le prix au comptant et le prix à terme dans un marché de commodité : l'hypothèse d'asymétrie du rendement d'opportunité est validée. Cela implique également que les stratégies de couverture reposant sur le modèle asymétrique seront plus efficaces que celles associées au modèle de Schwartz.

Estimer les paramètres d'un modèle de structure par terme des prix des matières premières à l'aide d'un filtre de Kalman ne constitue cependant vraisemblablement pas la meilleure méthode, pour plusieurs raisons. En premier lieu, il est possible que la linéarisation effectuée dans le cadre du filtre de Kalman étendu constitue une approximation trop importante compte tenu du caractère fortement non linéaire de la relation associant les prix à terme aux variables d'état dans le modèle asymétrique.

En second lieu et plus généralement, le filtre de Kalman n'est pas nécessairement la seule voie envisageable pour résoudre le problème inverse que constitue la présence de variables non observables dans les modèles de structure par terme des prix des matières premières. Le filtre de Kalman n'est pas, en effet, une méthode d'inversion en tant que telle : c'est en lui associant la procédure de maximisation du logarithme de la fonction de vraisemblance qu'il est possible d'obtenir les paramètres du modèle et, par conséquent, les séries temporelles de variables d'état. Dans les deux modèles étudiés, la fonction de vraisemblance est une fonction non linéaire des paramètres. Utiliser cette dernière pour estimer les paramètres introduit donc une difficulté supplémentaire dans la procédure d'optimisation.

L'emploi de méthodes d'inversion plus classiques semble donc une voie à explorer. Au lieu d'estimer les paramètres du modèle à partir de la fonction de vraisemblance, ceux-ci pourraient être obtenus plus simplement, en minimisant la somme des carrés des innovations, à laquelle serait ajouté un terme de pénalité afin d'assurer la stabilité de la procédure d'optimisation.

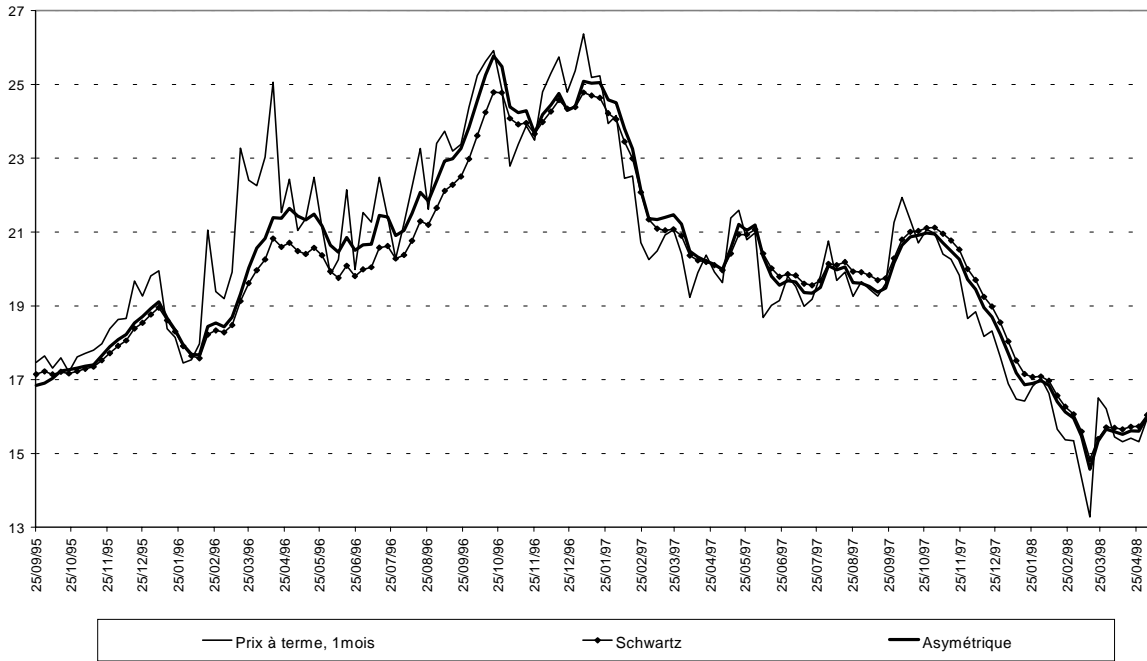
Une fois cette difficulté résolue, d'autres prolongations peuvent être envisagées pour ce travail : pour une analyse portant sur des échéances éloignées, Schwartz (1997) a par exemple montré que l'introduction du taux d'intérêt comme troisième variable d'état pouvait se révéler pertinente. Il serait également possible, conformément aux travaux d'Hilliard et Reis (1998), d'introduire un processus de saut dans la dynamique des prix, pour prendre en considération la possibilité que les prix aient un comportement erratique. Dans un marché tel que celui du pétrole brut, caractérisé par une répartition hétérogène de l'offre, une telle formalisation pourrait être intéressante.

## BIBLIOGRAPHIE

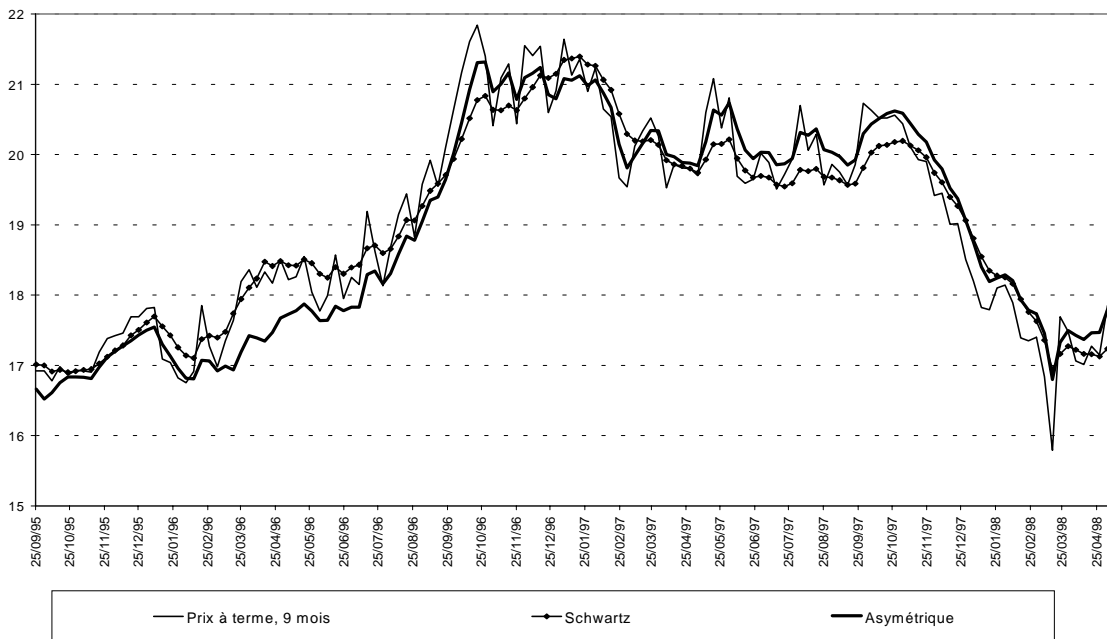
- ANDERSON B.D.O. and MOORE J.B., 1979, « *Optimal Filtering* », Englewood Cliffs, Prentice Hall.
- BLACK F. and SCHOLES M., 1973, « The Pricing of Options and Corporate Liabilities », *Journal of Political Economy*, 81, 637-659.
- BRENNAN M.J., 1958, « The Supply of Storage » *American Economic Review*, vol. 47, n°1, 50-72.
- BRENNAN M.J., 1991, « The Price of Convenience and the Valuation of Commodity Contingent Claims », in « *Stochastic Models and Options Values* », D. Land, B. Øksendal (Editors), Elsevier Science Publishers.
- BRENNAN M.J. and CREW N., 1995, « Hedging Long Maturity Commodity Commitments With Short-Dated Futures Contracts », Working Paper (July), The Anderson Graduate School of Management, University of California, Los Angeles.
- BRENNAN M.J. and SCHWARTZ E.S., 1985, « Evaluating Natural Resource Investments », *Journal of Business*, vol. 58, n°2, 135-157.
- GIBSON R. and SCHWARTZ E.S., 1989, « Valuation of Long Term Oil-Linked Assets », Working Paper #6-89, Anderson Graduate School of Management, University of California, Los Angeles.
- GIBSON R. and SCHWARTZ E.S., 1990, « Stochastic Convenience Yield and the Pricing of Oil Contingent Claims », *The Journal of Finance*, vol. XLV, n°3 (July), 959-976.
- HARVEY A.C., 1989, « *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter* », Cambridge University Press.
- HILLIARD J.E. and REIS J., 1998, « Valuation of Commodity Futures and Options under Stochastic Convenience Yield, Interest Rates, and Jump Diffusions in the Spot », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 33, n°1 (March), 61-86.
- KALDOR N., 1939, « Speculation and Economic Stability », *Review of Economic Studies*, vol. VIII, n°1 (October), 1-27.
- LAUTIER D., 1998, « Les opérations de Metallgesellschaft sur les marchés à terme pétroliers : spéculation ou couverture? » *Finance - Contrôle - Stratégie*, vol. 1, n°3 (septembre), 107-129.
- LAUTIER D., 1999, « Trois modèles de structure par terme des prix du pétrole : une comparaison », Cahier de recherche du CEREG, n°9907, septembre.
- LAUTIER D., 2000, « La structure par terme des prix des commodités : analyse théorique et applications au marché pétrolier », *Thèse de doctorat*, Université Paris IX, 422 p.
- RONCALLI T., 1995, « *Introduction à la programmation sous Gauss* », Editions Ritme informatique.

- ROUTLEDGE B.R., SEPPI D.J. and CHESTER S.S., 2000, « Equilibrium Forward Curves for Commodities », *The Journal of Finance*, vol LV, n°3 (June), 1297-1338.
- SCHWARTZ E.S., 1997, « The Stochastic Behavior of Commodity Prices : Implications for Valuation and Hedging », *The Journal of Finance*, vol. LII, n°3 (July), 923-973.
- SCHWARTZ E.S., 1997, « Valuing Long Term Commodity Assets », Working Paper #7-97, Anderson Graduate School of Management, University of California, Los Angeles, 23 p.
- SIMON Y., 1995, « *Marchés dérivés de Matières Premières et Gestion du Risque de Prix* », Economica, Collection Connaissance de la gestion, Paris, 260 p.
- SIMON Y., 1986, « *Bourses de commerce et marchés à terme de marchandises* » Dalloz Gestion, 3° Edition, Paris, 316 p.
- WEYMAR H., 1968, « *The Dynamics of the World Cocoa Market* », MIT Press, 253 p.
- WILLIAMS J. and WRIGHT B., 1989, « A Theory of Negative Prices for Storage », *The Journal of Futures Markets*, vol. 9, n°1, 1-13.
- WORKING H., 1949, « The Theory of Price of Storage », *American Economic Review*, 31 (December), 1254-1262.

**Figure 2. Prix à terme observés / prix à terme estimés, période 1995-1998**  
**Maturité de un mois**



**Figure 3. Prix à terme observés / prix à terme estimés, période 1995-1998**  
**Maturité de neuf mois**



ANNEXE 1 : OBTENTION DE L'EQUATION FONDAMENTALE DE VALORISATION DU  
MODELE ASYMETRIQUE

La dynamique des états, dans le modèle asymétrique, est la suivante : :

$$\begin{cases} dS = (\mu - \tilde{C})Sdt + \sigma_s S dz_s \\ d\tilde{C} = \left( \kappa(\alpha - C)\eta + \frac{1}{2}\beta\sigma_c^2 e^C \right) dt + \eta\sigma_c dz_c \end{cases} \quad (2)$$

Avec  $\eta = 1 - \beta(1 - e^C)$ , et  $E[dz_s \times dz_c] = \rho dt$

Dans le modèle asymétrique, le prix à terme F est une fonction du temps t, des variables d'état, et de la date d'échéance du contrat T :  $F(S, \tilde{C}, t, T)$ . En exprimant la maturité (T - t) par la variable  $\tau$ , il est possible d'écrire :

$$F(S, \tilde{C}, t, T) \equiv F(S, \tilde{C}, \tau)$$

Si la fonction associant le prix à terme F aux variables d'état et à la maturité est deux fois continûment dérivable sur  $[0, \infty[ \times [0, T]$  et si ces variables d'état suivent un processus de diffusion, F suit le même processus. Il est alors possible de décrire le comportement du prix à terme à l'aide du lemme d'Itô. L'équation différentielle stochastique suivante est obtenue :

$$\frac{dF}{F} = \frac{1}{F} \left\{ F_t + F_S(dS) + F_{\tilde{C}}(d\tilde{C}) + \frac{1}{2}F_{SS}(dS)^2 + \frac{1}{2}F_{\tilde{C}\tilde{C}}(d\tilde{C})^2 + F_{S\tilde{C}}(d\tilde{C}dS) \right\}$$

En utilisant les propriétés du calcul stochastique, les termes intermédiaires suivants peuvent être déterminés :

$$F_S(dS) = (\mu - \tilde{C})SF_S dt + \sigma_s SF_S dz_s$$

$$F_{\tilde{C}}(d\tilde{C}) = \left( \eta\kappa(\alpha - C) + \frac{1}{2}\sigma_c^2 \beta e^C \right) F_{\tilde{C}} dt + \sigma_c \eta F_{\tilde{C}} dz_c$$

$$\frac{1}{2}F_{SS}(dS)^2 = \frac{1}{2}\sigma_s^2 S^2 F_{SS} dt$$

$$\frac{1}{2}F_{\tilde{C}\tilde{C}}(d\tilde{C})^2 = \frac{1}{2}\sigma_c^2 \eta^2 F_{\tilde{C}\tilde{C}} dt$$

$$F_{S\tilde{C}}(dSd\tilde{C}) = \rho\sigma_s\sigma_c S\eta F_{S\tilde{C}} dt$$

$$F_t dt = -F_{\tau} dt$$

En remplaçant ces termes par leur valeur, et en séparant les termes déterministes des termes aléatoires, l'expression du rendement instantané du prix à terme est obtenue :

$$\frac{dF}{F} = \frac{1}{F} \left\{ \frac{1}{2}\sigma_s^2 S^2 F_{SS} + \frac{1}{2}\sigma_c^2 \eta^2 F_{\tilde{C}\tilde{C}} + \rho\sigma_s\sigma_c S\eta F_{S\tilde{C}} + (\mu - \tilde{C})SF_S + \left( \eta\kappa(\alpha - C) + \frac{1}{2}\sigma_c^2 \beta e^C \right) F_{\tilde{C}} - F_{\tau} \right\} dt + \frac{1}{F} \left\{ \sigma_s SF_S dz_s + \sigma_c \eta F_{\tilde{C}} dz_c \right\}$$



Ce qui peut s'écrire :

$$dF/F = E(S, C, t, T) dt + Z_1(S, C, t, T)dz_S + Z_2(S, C, t, T) dz_C$$

Un raisonnement d'arbitrage et la construction d'un portefeuille de couverture permettent ensuite d'obtenir la prime de terme du modèle asymétrique. Sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, il est possible d'établir une relation linéaire entre les fonctions E, Z<sub>1</sub> et Z<sub>2</sub>, indépendante de la maturité τ :

$$E(S, \tilde{C}, \tau) = \lambda_s Z_1(S, \tilde{C}, \tau) + \lambda_c Z_2(S, \tilde{C}, \tau)$$

La prime de terme du modèle asymétrique est exprimée de la façon suivante :

$$\phi(S, \tilde{C}, \tau) = E(S, \tilde{C}, \tau) = \lambda_s \sigma_s S \frac{F_s}{F} + \lambda_c \sigma_c \eta \frac{F_{\tilde{C}}}{F}$$

En remplaçant l'espérance de rendement instantané du prix à terme  $E(S, \tilde{C}, \tau)$  par sa valeur dans l'équation ci-dessus, on obtient :

$$\frac{1}{F} \left\{ \frac{1}{2} \sigma_s^2 S^2 F_{ss} + \frac{1}{2} \sigma_c^2 \eta^2 F_{\tilde{c}\tilde{c}} + \rho \sigma_s \sigma_c S \eta F_{s\tilde{c}} + (\mu - \tilde{C}) S F_s + \left( \eta \kappa (\alpha - C) + \frac{1}{2} \sigma_c^2 \beta e^C \right) F_{\tilde{c}} - F_\tau \right\} = \frac{\lambda_s \sigma_s S F_s}{F} + \frac{\lambda_c \sigma_c \eta F_{\tilde{c}}}{F}$$

⇔

$$\frac{1}{2} \sigma_s^2 S^2 F_{ss} + \frac{1}{2} \sigma_c^2 \eta^2 F_{\tilde{c}\tilde{c}} + \rho \sigma_s \sigma_c S \eta F_{s\tilde{c}} + (\mu - \tilde{C} - \lambda_s \sigma_s) S F_s + \left[ \eta (\kappa (\alpha - C) - \lambda_c \sigma_c) + \frac{1}{2} \sigma_c^2 \beta e^C \right] F_{\tilde{c}} - F_\tau = 0$$

En univers risque neutre et en posant :  $\lambda = \lambda_c \sigma_c$  et  $\hat{\alpha} = \alpha - \frac{\lambda}{\kappa}$ , l'équation aux dérivées partielles permettant de valoriser les prix à terme à partir du modèle asymétrique peut être obtenue.

$$\frac{1}{2} \sigma_s^2 S^2 F_{ss} + \frac{1}{2} \sigma_c^2 \eta^2 F_{\tilde{c}\tilde{c}} + \rho \sigma_s \sigma_c S \eta F_{s\tilde{c}} + (r - \tilde{C}) S F_s + \left[ \eta \kappa (\hat{\alpha} - C) + \frac{1}{2} \sigma_c^2 \beta e^C \right] F_{\tilde{c}} - F_\tau = 0 \quad (4)$$

Avec :  $\eta = 1 - \beta(1 - e^C)$ , et  $\tilde{C}(t) = (1 - \beta)C(t) + \beta C_1(t)$

La condition aux bornes associée est la suivante :

$$F(S, \tilde{C}, T, T) = S(T).$$

ANNEXE 2 : OBTENTION DE LA SOLUTION SEMI-ANALYTIQUE DU MODELE  
ASYMETRIQUE

L'équation à résoudre est la suivante :

$$\boxed{\frac{1}{2}\sigma_s^2 S^2 F_{SS} + \frac{1}{2}\sigma_c^2 \eta^2 F_{\tilde{c}\tilde{c}} + \rho\sigma_s\sigma_c S\eta F_{S\tilde{c}} + (r - \tilde{C})SF_S + \left[ \eta\kappa(\hat{\alpha} - C) + \frac{1}{2}\sigma_c^2 \beta e^C \right] F_{\tilde{c}} - F_\tau = 0} \quad (4)$$

Avec :  $\eta = 1 - \beta(1 - e^C)$ , et  $\tilde{C}(t) = (1 - \beta)C(t) + \beta C_1(t)$

sous la condition aux bornes associée :

$$F(S, \tilde{C}, T, T) = S(T)$$

Pour résoudre cette équation, une solution de type Feynman-Kack est recherchée. Cette solution est de la forme :  $F(t, T) = E_t^Q[S(T)]$ . Elle est obtenue, compte tenu du fait que le modèle asymétrique est une forme généralisée du modèle de Schwartz, à partir de la solution de ce dernier.

Dans le modèle de Schwartz, l'expression analytique du prix au comptant à la date T,  $S(T)$  est la suivante :

$$S(T) = S(t) \times \exp\left( \left( r - \frac{1}{2}\sigma_s^2 \right) \tau + \sigma_s \int_t^T dz_s(v) - \int_t^T C(v) dv \right) \quad (\text{AII-1})$$

De plus, l'expression analytique de C est :

$$C(v) = \hat{\alpha} + (C(t) - \hat{\alpha})e^{-\kappa(v-t)} + \sigma_c e^{-\kappa v} \int_t^v e^{\kappa y} dz_c(y) \quad (\text{AII-2})$$

avec  $\hat{\alpha} = \alpha - \frac{\lambda}{\kappa}$

L'expression (AII-2) peut être intégrée<sup>21</sup> :

$$\int_t^T C(v) dv = \int_t^T \left( \hat{\alpha} + (C(t) - \hat{\alpha})e^{-\kappa(v-t)} + \sigma_c e^{-\kappa v} \int_t^v e^{\kappa y} dz_c(y) \right) dv$$

⇒

$$\int_t^T C(v) dv = \hat{\alpha}\tau + (C(t) - \hat{\alpha})H + \int_t^T \left( \sigma_c e^{-\kappa v} \int_t^v e^{\kappa y} dz_c(y) \right) dv$$

avec  $H = \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa}$

puis réintroduite dans l'équation (AII-1) :

$$S(T) = S(t) \times \exp\left( \left( r - \frac{1}{2}\sigma_s^2 \right) \tau + \hat{\alpha}(H - \tau) - HC(t) + \sigma_s \int_t^T dz_s(v) - \int_t^T \left( \sigma_c e^{-\kappa v} \int_t^v e^{\kappa y} dz_c(y) \right) dv \right) \quad (\text{AII-3})$$

<sup>21</sup> L'intégrale de  $C(v)$  est également une gaussienne de même moyenne que celle de  $C(v)$ . Sa covariance est précisée en annexe 3.

L'espérance de  $S(T)$  est alors :

$$E_t^Q[S(T)] = S(t) \times \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma_s^2\right)\tau + \hat{\alpha}(H - \tau) - HC(t)\right) \times E_t^Q\left[\exp\left(\sigma_s \int_t^T dz_s(v) - \int_t^T \left(\sigma_c e^{-\kappa v} \int_t^v e^{\kappa y} dz_c(y)\right) dv\right)\right]$$

En remplaçant, dans l'équation (AII-3),  $C(v)$  par  $\tilde{C}(v)$ , et compte tenu de la relation (3), on obtient :

$$S(T) = S(t) \times \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma_s^2\right)\tau + \hat{\alpha}(1 - \beta)(H - \tau) - H(1 - \beta)C(t) + \sigma_s \int_t^T dz_s(v) - (1 - \beta) \int_t^T \left(\sigma_c e^{-\kappa v} \int_t^v e^{\kappa y} dz_c(y)\right) dv - \beta \int_t^T \exp(C(v)) dv\right)$$

Posons :

$$A(\tau) = \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma_s^2\right)\tau + \hat{\alpha}(1 - \beta)(H - \tau)\right)$$

$$B(v) = \sigma_c e^{-\kappa v} \int_t^v e^{\kappa y} dz_c(y)$$

$$D(v) = \hat{\alpha} + (C(t) - \hat{\alpha})e^{-\kappa(v-t)}$$

La solution semi-analytique du modèle asymétrique est alors :

$$F(t, T) = S(t) \times A(\tau) \times \exp(H(\beta - 1)C(t)) E_t^Q\left[\exp\left(\sigma_s \int_t^T dz_s(v) - (1 - \beta) \int_t^T B(v) dv - \beta \int_t^T (\exp(B(v) + D(v))) dv\right)\right] \quad (5)$$

Cette solution peut également être écrite sous la forme suivante :

$$\boxed{F(t, T) = F_A(t, T) \times E_t^Q[\exp(\sigma_s Z_s(\tau) - (1 - \beta)W - \beta V)]} \quad (\text{AII-4})$$

Avec :

$$H = \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa}$$

$$F_A(t, T) = S(t) \times A(\tau) \times \exp(H(\beta - 1)C(t))$$

$$Z_s(\tau) = \int_t^T dz_s(y) = u_s \times \sqrt{\tau}, \text{ où } \tau = T - t, \text{ et } u_s \sim N(0, 1)$$

$$W = \int_t^T B(v) dv = \int_t^T \sigma_c e^{-\kappa v} \left\{ \int_t^v e^{\kappa y} dz_c(y) \right\} dv$$

$$V = \int_t^T \exp(B(v) + D(V)) dv = \int_t^T \exp\left(\hat{\alpha} + (C(t) - \hat{\alpha})e^{-\kappa(v-t)} + \sigma_c e^{-\kappa v} \left\{ \int_t^v e^{\kappa y} dz_c(y) \right\}\right) dv$$

où  $v \leq T$ .

### ANNEXE 3. CALCULS NECESSAIRES A L'OBTENTION DE PRIX A TERME PAR SIMULATION

La solution du modèle asymétrique étant semi-analytique, l'espérance  $E_t^Q [\exp(\sigma_s Z_s(\tau) - (1-\beta)W - \beta V)]^{22}$  est obtenue par simulations. Pour cela, l'expression de l'espérance est transformée : en particulier, les termes V et W sont tous deux des fonctions de B(v). Pour simuler l'espérance, B(v) doit être généré en respectant sa corrélation avec Z<sub>s</sub>. L'expression recherchée est du type :

$$B(v) = \lambda Z_s(\tau) + \mu R(u, \tau) \quad (\text{AIII-1})$$

où R est N(0,1) et indépendant de Z<sub>s</sub>(τ).

Pour cela, la covariance entre B(v) et Z<sub>s</sub>(τ) est calculée :

$$Cov(B(v), Z_s(\tau)) = E[B(v) \times Z_s(\tau)] = \left\langle \sigma_c e^{-\kappa v} \int_t^v e^{\kappa y} dz_c(y) \times \int_t^T dz_s(y) \right\rangle$$

Si  $v \leq T$ , alors :

$$Cov(B(v), Z_s(\tau)) = \rho \sigma_c e^{-\kappa v} \left\langle \int_t^v e^{\kappa y} d(y) \right\rangle = \frac{\rho \sigma_c}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(v-t)})$$

$$\text{Soit } \lambda = \frac{Cov(B(v), Z_s(\tau))}{\tau}$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \mu^2 &= Var[B(v) - \lambda Z_s(\tau)] = Var[B(v)] - \lambda^2 \tau \\ &= \sigma_c^2 \left( \frac{1 - e^{-2\kappa(v-t)}}{2\kappa} \right) - \frac{\sigma_c^2 \rho^2}{\tau} \times \left( \frac{1 - e^{-\kappa(v-t)}}{\kappa} \right)^2 \end{aligned}$$

On vérifie aisément que R(u,τ) est indépendant de Z<sub>s</sub>(τ) :

$$\begin{aligned} E[R(u, \tau) \times Z_s(\tau)] &= \frac{1}{\mu} \times E[(B(v) - \lambda Z_s(\tau)) \times Z_s(\tau)] \\ &= \frac{1}{\mu} \times E[(B(v) \times Z_s(\tau)) - \lambda (Z_s(\tau))^2] \\ &= \frac{1}{\mu} \times E[B(v) \times Z_s(\tau)] - E[\lambda \tau] \\ &= \frac{1}{\mu} \times [\lambda \tau - \lambda \tau] = 0 \end{aligned}$$

La relation (AIII-1) est donc établie. Pour obtenir le terme W (l'intégrale de B(v)), les points R(u<sub>1</sub>,τ),...,R(u<sub>n</sub>,τ) utilisés pour calculer cette intégrale sont générés. La matrice C est déterminée dans cette optique :

$$C[i, j] = Cov[R(u_i, \tau), R(u_j, \tau)] = E[R(u_i, \tau) \times R(u_j, \tau)]$$

<sup>22</sup> Cf annexe 2, équation (AII-4).

Avec :

$$\begin{aligned}
R(u_i, \tau) &= \frac{1}{\mu_i} \left( B(u_i) - \frac{E[B(u_i) \times Z_S(\tau)]}{\tau} Z_S(\tau) \right) \\
E[R(u_i, \tau) \times R(u_j, \tau)] &= \frac{1}{\mu_i \mu_j} E \left[ \left( B(u_i) - \frac{E[B(u_i) \times Z_S(\tau)]}{\tau} Z_S(\tau) \right) \times \left( B(u_j) - \frac{E[B(u_j) \times Z_S(\tau)]}{\tau} Z_S(\tau) \right) \right] \\
&= \frac{1}{\mu_i \mu_j} E \left[ B(u_i) B(u_j) - \frac{B(u_i) E[B(u_j) Z_S(\tau)]}{\tau} Z_S(\tau) - \frac{B(u_j) E[B(u_i) Z_S(\tau)]}{\tau} Z_S(\tau) + \frac{E[B(u_i) Z_S(\tau)] E[B(u_j) Z_S(\tau)]}{\tau} \right] \\
\boxed{C[i, j]} &= \frac{1}{\mu_i \mu_j} \times \left[ Cov(B(u_i), B(u_j)) - \frac{Cov(B(u_i), Z_S(\tau)) \times Cov(B(u_j), Z_S(\tau))}{\tau} \right] \quad (AS8)
\end{aligned}$$

Avec :

$$Cov(B(u_i), B(u_j)) = E \left[ \left( \sigma_c e^{-\kappa u_i} \int_t^{u_i} e^{\kappa y} dz_C(y) \right) \times \left( \sigma_c e^{-\kappa u_j} \int_t^{u_j} e^{\kappa y} dz_C(y) \right) \right]$$

Soit :

$$Cov(B(u_i), B(u_j)) = \frac{\sigma_c^2 e^{-\kappa(u_i + u_j)}}{2\kappa} \times \left( e^{2\kappa(\min(u_i, u_j))} - e^{2\kappa t} \right)$$

La décomposition de Choleski de la matrice C s'écrit :  $C = LL'$ , où L est triangulaire inférieure, et L' est la transposée de L. Si X est un vecteur de composantes  $X_i$  non corrélées et gaussiennes, alors :  $R = LX$ . L'équation (AIII-1) est utilisée pour calculer les termes V et W.

## LONG SUMMARY

### A TERM STRUCTURE MODEL FOR COMMODITY PRICES WITH AN ASYMMETRICAL BEHAVIOR OF THE CONVENIENCE YIELD

Delphine LAUTIER, University Paris IX - Dauphine  
Alain GALLI, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris

KEY WORDS : storage theory - convenience yield - stochastic models - term structure - complete markets - extended Kalman filter - commodity prices.

This paper proposes the following hypothesis, relying on the storage theory and on the study of arbitrage relationships between the physical and the futures market : the behavior of the convenience yield, in a commodity market, is asymmetrical. It is high and volatile in backwardation, when stocks are rare. It is conversely low and stable when stocks are abundant. Brennan (1991) and Routledge, Seppi and Spatt (2000) also used this kind of approach. Nevertheless, Brennan supposes the convenience yield is deterministic. In the model presented by Routledge and *alii*, the asymmetry in the behavior of the convenience yield is represented with a correlation between the spot price and the convenience yield, which is higher in backwardation than in contango. In that case, the convenience yield is an endogeneous variable, determined by the storage process, and not an exogeneous variable, as is the case in this article.

The convenience yield represents the benefit associated with stocks holding, and explains why stocks are held in backwardation. The reasons are twofold : first, supply and demand in a commodity market are characterized by uncertainty ; second, commodities are involved in rigid commercial and industrial activities. This rigidity manifests itself by the impossibility, for the industrial operators, to quickly adapt their supply to a fluctuation of the demand. It is explained by i) the presence of high fixed costs in the transportation, storage, production and transformation activities, ii) the distance separating consumption and production places, iii) the existence of quality differentials. Most of the time, uncertainty and rigidity work together.

The storage theory can bring some useful conclusions to construct a term structure model. First, the relationship between spot and future prices allows the identification of at least two variables influencing the future price : the spot price and the convenience yield net of storage costs. Second, convenience yield and spot price are positively correlated : both of them are an inverse function of stocks level. Third, the examination of arbitrage relationships between physical and paper markets shows that the basis has an asymmetrical behavior : in contango, its level is limited to storage costs. This is not the case in backwardation. Furthermore, the basis is stable in contango, and volatile in backwardation, since in this situation stocks cannot absorb price fluctuations. This asymmetry has implications on the dynamic of convenience yield, which were not taken into account.

In order to bridge this gap, we propose a model in which the convenience yield has an asymmetrical behavior, inspired by Schwartz's model (1997). This model relies on five hypothesis : i) the markets are frictionless, there are no taxes, nor transaction costs ii) the transactions are continuous iii) there is no restriction to short selling, iv) interest rates are constant. The fifth hypothesis concerns the dynamic of state variables.

The construction of the model follows three steps : i) identification of the state variables and definition of their dynamics, ii) application of the Ito's lemma to obtain the dynamic behavior of the future price iii) arbitrage reasoning and construction of a hedge portfolio. The latter allow to obtain the term premium and the fundamental valorization equation of the model and the semi-analytical solution of this equation.

This asymmetrical model relies on two state variables, positively correlated : the spot price and the convenience yield. As in Schwartz's model, the convenience yield is mean reverting. This representation presupposes there is a "normal" level for stocks, which satisfies the needs of the industry, and that stocks tend to adjust to this level, through the behavior of industrial operators. The convenience yield acts as a continuous dividend yield in the dynamic of the spot price. An asymmetry is introduced in the convenience yield dynamic. The asymmetry is measured by the parameter  $\beta$ . When  $\beta$  is set to zero, the asymmetrical model reduces to the Schwartz's model.

In the asymmetrical model, when the convenience yield is high, its volatility is high too. The economic intuition beyond this hypothesis can be summarized in the following way : in the two models, the volatility of the spot price is proportional to the level of the spot price, reflecting the fact that when stocks are low and spot prices are high, any modification in the demand has a strong impact on spot prices. The same reason can justify the introduction of a convenience yield volatility proportional to its level : when spot prices fluctuate strongly, the benefit associated with the selling or the transformation of stocks has the same evolution. The volatility of the convenience yield is therefore higher.

The drawbacks of the asymmetrical model is first that it introduces a new parameter,  $\beta$ , representing the asymmetry in the behavior of the convenience yield, and second that it has only a semi-analytical solution. Therefore, numerical simulations are necessary to obtain theoretical prices.

To test the performances of the asymmetrical model, a new econometric method, the extended Kalman filter, is developed. The advantage of this method, compared to the simple Kalman filter used by Schwartz in 1997, is that it allows for non linear models. The drawback of the extended Kalman filter is that it introduces an approximation in the relationship between the theoretical relationship between the futures prices and the state variables (there is a linearization of this relationship).

The performances of the two models are compared on the crude oil market, between 1995 and 1998. A simple Kalman filter is used for the Schwartz's model, and an extended Kalman filter is employed for the asymmetrical model. Even with two approximations acting against the asymmetrical model (numerical simulations and linearization), the results show first that the optimal parameter  $\beta^*$  representing the asymmetry is positive, and second that the asymmetrical model is better suited than the Schwartz's model to represent the crude oil future prices, for all the maturities used in the study : one, three, six and nine months.

An improvement is therefore made in the comprehension of the relationship between spot and future prices in commodities markets : the convenience yield has an asymmetrical behavior. Moreover, the hedging strategies relying on the asymmetrical model must be more efficient than those associated to the Schwartz's model.

Some extensions could be considered for this model : for studies with long maturity contracts, Schwartz (1997) has for example showed that the introduction of a stochastic interest rate could be interesting. An other possibility is to introduce, as did Hilliard and Reis in 1998 with the Schwartz's model, a jump process in the dynamic of the prices. This kind of formalization allows for an erratic behavior of the prices. In a market like the crude oil market, characterized by an heterogeneous repartition of supply, this could improve the performances of the model.