Problème inverse en calcul des variations

Ngalla Djitté [a]

[a] Université Gaston Berger de Saint Louis
LANI Bp 234 St-Louis, Sénégal.
ngalla@ceremade.dauphine.fr

12 décembre 2005

Résumé

Dans ce travail, on donne des conditions necessaires et suffisantes pour qu'une application $f \to u_f$ entre espaces fonctionnels provient ou non d'un problème de minimisation, c'est-à dire u_f minimise un certain critère dépendant du paramètre f. L'exemple traité ici est le problème de *Dirichlet*. On donnera des conditions necessaires et suffisantes pour qu'il existe existe une fonction L définie sur $\mathbb{R}$, de classe C^2 et strictement convexe telle que pour tout $f \in L^2(0,T)$, la fonction u_f soit solution du problème de calcul des variations suivant :

$$(P_f) \quad \begin{cases} \inf\limits_u \displaystyle\int_0^T \left[L(\frac{du}{dt}) - f(t)u(t) \right] dt, \\ u(0) = u_0,\, u(T) = u_1. \end{cases} \tag{1}$$

Mots-clés: *Probémes inverses, calcul des variations, lagrangien, équations d'Euler, convexité.*

1 Introduction

On désigne par I un intervalle de $\mathbb{R}$, $I = [0,T]$ où $T > 0$. Soit $f \in L^2(I)$. On considère le problème de calcul des variations suivant :

$$(P_f) \quad \begin{cases} \inf \quad J_f(u) \\ \\ u \in H^1(I) \\ \\ u(0) = u_0,\, u(T) = u_1 \end{cases} \tag{2}$$

où

$$H^1(I) = \{u \in L^2(I) \ \mid u' \in L^2(I)\} \tag{3}$$

et

$$J_f(u) = \int_0^T \left[L(\frac{du}{dt}) - f(t)u(t) \right] dt \tag{4}$$

Moyennant certaines hypothèses sur L, le problème (P_f) admet une unique solution notée $u_f \in H^1(I)$. On introduit l'opérateur G défini de $L^2(I)$ dans $L^2(I)$ par :

$$G(f) = \dot{u}_f, \ \forall \ f \in L^2(I) \tag{5}$$

où $\dot{u}_f$ désigne la dérivée de u_f par rapport à t.

Réciproquement, etant donné un opérateur

$$G : L^2(I) \to L^2(I)$$

existe-t-il une fonction $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe C^2 telle :

$$\int_0^T \left[L(\frac{du_f}{dt}) - f(t)u_f(t) \right] dt = \inf_u \left\{ \int_0^T \left[L(\frac{du}{dt}) - f(t)u(t) \right] dt \right\} \ \ \forall \ f \in L^2(I).$$

où

$$u_f(t) = u_0 + \int_0^t G(f)(s)\, ds, \quad \forall \ t \in [0,T]. \tag{6}$$

En d'autres termes, on cherche une fonction L définie sur $\mathbb{R}$, de classe C^2 et strictement convexe telle pour tout f dans $L^2(I)$, la fonction u_f donnée par (6) soit l'unique solution de l'équation d'*Euler Lagrange* suivante :

$$\frac{d}{dt}\left[L'(\dot{u}_f(t)) \right] = f(t), \quad \text{p.p } t \in [0,T]$$

Dans ce travail, nous apporterons une réponse à cette question.

2 Préliminaires

On considère le problème (P_f) et on fait les hypothèses suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \text{ est } C^2 \ \text{ sur } \ \mathbb{R}; \\ \exists \ a, b \in \mathbb{R}_+ \ \ | \ \ |L'(w)| \ \le a + b|w|, \ \ \forall\, w \in \mathbb{R}; \\ \exists \ k_0, k_, > 0, \ \ | \ \ k_0 \ \le \ L''(w) \le k_1 \ \ \forall\, w \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \tag{7}$$

Théorème 1 *Soit $f \in L^2(I)$, alors sous les hypothèses* (7), (P_f) *admet une unique solution notée $u_f \in H^1(I)$. De plus l'application G définie de $L^2(I)$ dans $L^2(I)$ par* (5) *est différentiable au sens de* Frechet *sur $L^2(I)$.*

Nous donnerons seulement une preuve de la régularité de l'opérateur G et pour l'existence, nous vous renvoyons dans *Ekeland-Turnbull*, [10]. Mais avant cela, nous commençons d'abord par reformuler le problème (P_f) et ensuite énoncer quelques résultats qui nous seront utiles dans la preuve.

2.1 Vers la preuve du théorème 1

Soit E, le sous-ensemble de $L^2(I)$ défini par :

$$E = \{v \in L^2(I) \mid \int_0^T v(s)\,ds = u_1 - u_0\} \tag{8}$$

Pour $v \in L^2(I)$ on pose $x_v(t) := u_0 + \int_0^t v(s)\,ds$, alors on a $x_v(0) = u_0$, $x_v(T) = u_1$ et de plus $\dot{x}_v(t) = v(t)$ p.p $t \in [0,T]$.

Introduisons les deux fonctions ϕ et Ψ définies sur $L^2(I)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$\Psi(v) = \int_0^T L(v(t))\,dt, \ \ \forall\, v \in L^2(I), \quad \phi(v) = \int_0^T f(t)x_v(t)\,dt, \ \ \forall\, v \in L^2(I)$$

Alors le problème (P_f) prend la forme suivante :

$$\inf_{v\in E} \ J(v) \tag{9}$$

où J est définie de $L^2(I)$ dans $\mathbb{R}$ par : $J(v) = \Psi(v) + \phi(v)$

Proposition 1 (Krasnoselskii) *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $g : \Omega \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant :*

$$\forall \eta \in \mathbb{R}^k, \ \ x \to g(x,\eta) \ \ \textit{est mesurable,}$$
$$\textit{pour presque tout } x \in \Omega, \ \ \eta \to g(x,\eta) \ \ \textit{est continue.}$$

Pour toute fonction mesurable $u : \Omega \to \mathbb{R}^k$, soit $G(u)$ la fonction mesurable définie par :

$$G(u)(x) = g(x, u(x)), \quad \forall x \in \Omega.$$

S'il existe $p, r \in [1, +\infty[$ tels que $G(u) \in L^r(\Omega)$ pour tout $u \in L^p(\Omega)$, alors G est continue de $L^p(\Omega)$ dans $L^r(\Omega)$.

Preuve. Voir [9].

Lemme 1 *On suppose que les hypothèses du théorème 1 sont vérifiées. Alors il existe des constantes $a_1 \in \mathbb{R}_+$, $b_1 > 0$ telles que :*

$$|L(w)| \leq a_1 + b_1|w|^2, \quad \forall w \in \mathbb{R} \tag{10}$$

Preuve. Voir [10].

Lemme 2 *Soit* $w : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *différentiable telle que :*

$$\exists\ a, b \in \mathbb{R}_+,\ p > 1 \ \mid\ \|w'(x)\| \le a + b\|x\|^{p-1},\ \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{11}$$

Soit Ω *une partie mesurable de* $\mathbb{R}^k$ *de mesure finie. Alors l'application*

$$\phi_w : L^p(\Omega, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie par :

$$\phi_w(x) = \int_\Omega w(x(t))\, dt, \quad \forall x \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$$

est dérivable au sens de Gâteau et de plus on a :

$$\phi_w'(x) = w'(x), \quad \forall x \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$$

Preuve du lemme 2. Soient $k, z \in \mathbb{R}^n$. Comme w est différentiable on a :

$$\lim_{s \to 0} \frac{w(z + sk) - w(z)}{s} = w'(z) \cdot k$$

D'aprés le théorème des accroissements finis, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que :

$$w(z + sk) - w(z) = w'(z + s\theta k) \cdot (sk)$$

Soit $|s| \le c$ pour une constante c positive, alors on a :

$$\left| \frac{w(z + sk) - w(z)}{s} \right| \le c|w'(z + \theta sk) \cdot k|$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et (11) entrainent l'existence d' une constante réelle positive notée C_p telle :

$$\left| \frac{w(z + sk) - w(z)}{s} \right| \le C_p \left(\|k\| + \|k\|.\|z\|^{p-1} + \|k\|^p \right), \quad \forall\, k, z \in \mathbb{R}^n. \tag{12}$$

De (12) on en déduit : $\forall\ |s|\ \le c,\ \forall\, t \in \Omega$ et $\forall\ x, y \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$

$$\left| \frac{w(x(t) + sy(t)) - w(x(t))}{s} \right| \le C(p) \left(\|y(t)\| + \|y(t)\|.\|x(t)\|^{p-1} + \|y(t)\|^p \right).$$

En utilisant l'inégalité de *Cauchy-Schwarz* on montre que l 'application :

$$t \in \Omega \ \longrightarrow \|y(t)\| + \|y(t)\|.\|x(t)\|^{p-1} + \|y(t)\|^p$$

est intégrable sur Ω. Donc le théorème de convergence dominée de *Lebesgue* :

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 0}\frac{\phi_w(x+sy)-\phi_w(x)}{s} &= \lim_{s\to 0}\int_\Omega \frac{w(x(t)+sy(t))-w(x(t))}{s}\,dt\\ &= \int_\Omega y(t).w'(x(t))\,dt\end{aligned}$$

L'inégalité (11) implique que $w'(x)\in L^q(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $\forall x\in L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ où q est le conjugué de p. Par conséquent l'application définie de $L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$y\longrightarrow \int_\Omega y(t)w'(x(t))\,dt$$

est linéaire et continue. Et enfin le théorème de Riesz entraine que :

$$\phi'_w(x)=w'(x),\quad \forall x\in L^p(\Omega;\mathbb{R}^n).\blacksquare$$

Lemme 3 *Sous les hypothèses* (7), Ψ *est de classe* C^2 *sur* $L^2(I)$ *et de plus on a :*

$$\Psi^{"}(v)(k,h)=\int_0^T L^{''}(v(t))k(t)h(t)\,dt,\quad \forall\, v,k,h\,\in\,L^2(I)$$

En outre, pour $\bar{v}\in L^2(I)$, *l'application* $T_{\bar{v}}$ *définie de* $L^2(I)$ *dans* $\mathcal{L}(L^2(I),\mathbb{R})$ *par :*

$$T_{\bar{v}}(h)=\ \Psi^{"}(\bar{v})\cdot h,\ \ \forall\, h\,\in\,L^2(I) \tag{13}$$

est non dégénéré.

Preuve. D'aprés (7) , L est C^2 et L' vérifie :

$$|L'(w)|\le a+b|w|,\ \ \forall w\in\mathbb{R}. \tag{14}$$

donc le lemme 2 entraine que Ψ est Gâteau différentiable avec :

$$\Psi'(v)=L'(v),\quad \forall v\in L^2(I).$$

L'inégalité (14) implique que $L'(v)\in L^2(I)$ $\forall\, v\in L^2(I)$ et donc la proposition (1) entraine que l'application définie de $L^2(I)$ dans $L^2(I)$ par :

$$v\longrightarrow L'(v)$$

est continue sur $L^2(I)$. Ce qui montre que Ψ est C^1 sur $L^2(I)$.
Soient maintenant v,k et h dans $L^2(I)$. En utilisant le fait que :

$$|L^{''}(w)|\le k_1,\quad \forall\ w\in\mathbb{R} \tag{15}$$

et le théorème de la convergence dominée, on obtient :

$$\lim_{t\to 0}\frac{\Psi'(v+tw)-\ \Psi'(v)}{t}.h \ = \ \lim_{t\to 0}\int_0^T \frac{L'(v(s)+tw(s))-L'(v(s))}{t}h(s)\,ds$$
$$= \int_0^T L^{''}(v(s))k(s)h(s)\,ds.$$

D'une part l'inégalité (15) entraine que :

$$L''(v)\in L^{\infty}(I),\ \ \forall v\in L^2(I),$$

d'autre part

$$k.h\in L^1(I),\ \ \forall\, k,h\in L^2(I)$$

Donc

$$L''(v).k.h\in L^1(I),\ \ \ \forall\ v,k,h\in L^2(I)$$

D' où l'application :

$$(k,h)\longrightarrow \int_0^T L''(v(s))k(s)h(s)\,ds$$

définit une forme bilinéaire continue de $L^2(I)\times L^2(I)$ dans $\mathbb{R}$. Ce qui prouve donc que Ψ' est dérivable et de plus on a :

$$\Psi^{"}(v)k.h=\int_0^T L''(v(s))k(s)h(s)\,ds,\quad \forall v,k,h\ \in L^2(I)$$

Par les mêmes arguments on montre l'application $v\rightarrow\ \Psi^{''}(v)$ est continue d'où $v\longrightarrow\ \Psi(v)$ est de classe C^2 sur $L^2(I)$.

Pour terminer nous allons montrer que pour tout $\bar{v}\ \in\ L^2(I)$, l'application $T_{\bar{v}}$ est non dégénéré. Soit $h\in L^2(I)$ tel que

$$T_{\bar{v}}(h)=\ \Psi^{"}(\bar{v})\cdot h=0$$

Donc on a :

$$c_0\|h\|^2_{L^2(I)}\ \leq\ \ \Psi^{"}(\bar{v})\cdot h\cdot h=0$$

d'où $h=0$ et par conséquent $T_{\bar{v}}$ est injective.

Pour la surjection, on montre que $T_{\bar{v}}$ est à image fermée et dense dans

$\mathcal{L}(L^2(I),\mathbb{R})$. En effet soit (v_n) une suite $L^2(I)$ telle que $T_{\bar{v}}(v_n) \to \varphi$ dans $\mathcal{L}(L^2(I),\mathbb{R})$. Soit $n, m \in \mathbb{N}$, alors on a :

$$c_0\|u_n - u_m\|^2_{L^2(I)} \leq T_{\bar{v}}(u_n - u_m)\cdot(u_n - u_m) \leq \|T_{\bar{v}}(u_n - u_m)\|_{\mathcal{L}(L^2(I),\mathbb{R})}\, \|u_n - u_m\|_{L^2(I)}$$

ce qui entraine que (u_n) est de *Cauchy* dans $\text{Ł}^2(I)$ et donc elle converge dans $L^2(I)$ vers v. D'où par continuité de $T_{\bar{v}}$ on obtient $\varphi = T_{\bar{v}}(v)$ ce qui entraine que $\mathbf{Im}T_{\bar{v}}$ est fermé dans $\mathcal{L}(L^2(I),\mathbb{R})$.

Soit $v \in (\mathrm{Im}(T_{\bar{v}}))^{\perp}$, donc $\forall\, u \in L^2 I$ on a $T_{\bar{v}}(u)\cdot v = 0$. En particulier $T_{\bar{v}}(v)\cdot v = 0$ ce qui implique que $v = 0$ et par conséquent on a :

$$(\mathbf{Im}(T_{\bar{v}}))^{\perp} = \{0\}$$

Comme $\mathbf{Im}(T_{\bar{v}})$ est fermé, on en déduit que l'application $T_{\bar{v}}$ est surjective et donc elle est bijective.■

2.2 Preuve du théorème 1

On interpréte d' abord le problème (9) comme un problème d'optimisation avec contraines d'égalité et ensuite écrire les conditions d'optimalité du premier ordre. Pour ce faire on introduit l'application F définie de $L^2(I)$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$F(v) = \int_0^T v(s)\, ds$$

de sorte que l'ensemble E des contraintes devient :

$$E = \{v \in L^2(I) \;\mid\; F(v) = u_1 - u_0\}$$

Ainsi le problème (9) s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \inf\; J(v) := [\; \Psi(v) + \;\phi(v)] \\ v \in L^2(I) \\ \;F(v) = u_1 - u_0 \end{cases} \tag{16}$$

Pour $f \in L^2(I)$, on fait la notation suivante :

$$Pf(t) = \int_0^t f(s)\, ds$$

En faisant une intégration par parties, on peut réécrire $J(v)$ sous la forme :

$$J(v) = \;\Psi(v) + Pf(0)u_0 - Pf(T)u_1 + \int_0^T Pf(s)v(s)\, ds, \quad \forall\; v \in L^2(I)$$

donc

$$J'(v).u = \int_0^T L'(v(s))u(s)\,ds + \int_0^T Pf(s)u(s)\ ds,\ \ \forall\ v,u \in L^2(I).$$

L'application F est linéaire donc *Frechet*-différentiable et de plus on a :

$$F'(v) = \ F\ \neq 0\ \ \forall\, v \in L^2(I)$$

Maintenant on peut écrire les conditions d'optimalité du premier ordre de *Lagrange* du problème (16) : si v est solution de (16), alors il existe un multiplicateur de *Lagrange* noté $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{l} J'(v) + \lambda\ F = 0 \\ \\ F(v) = u_1 - u_0 \end{array}\right. \tag{17}$$

Soit $\bar{f} \in L^2(I)$ fixé. Soit $\bar{v}$ et $\bar{\lambda}$ la solution et le multiplicateur de *Lagrange* associés à $\bar{f}$. On a donc $G(\bar{f}) = \bar{v}$ et

$$\left\{\begin{array}{l} J'(\bar{v}) + \bar{\lambda}\ F = 0 \\ \\ F(\bar{v}) = u_1 - u_0 \end{array}\right. \tag{18}$$

Soit $\mathcal{H}$ l'application définie de $L^2(I)\times\mathbb{R}\times L^2(I)$ à valeurs dans $\mathcal{L}(L^2(I),\mathbb{R})\times\mathbb{R}$ par :

$$\mathcal{H}(v,\lambda,f) = \left(\begin{array}{c} J'(v) + \lambda\ F \\ \\ F(v) + u_0 - u_1 \end{array}\right),\ \forall\,(v,\lambda,f) \in\ L^2(I)\times\mathbb{R}\times L^2(I). \tag{19}$$

Alors on a :

$$\mathcal{H}(\bar{v},\bar{\lambda},\bar{f}) = 0 \tag{20}$$

On note par $\mathcal{H}_{v,\lambda}$ la dérivée de $\mathcal{H}$ par rapport à v et λ. Donc on peut écrire $\mathcal{H}_{v,\lambda}(\bar{v},\bar{\lambda},\bar{f})$ sous la forme :

$$\mathcal{H}_{v,\lambda}(\bar{v},\bar{\lambda},\bar{f}) = \left(\begin{array}{cc} \Psi^{"}(\bar{v}) & F \\ F & 0 \end{array}\right) \tag{21}$$

On va montrer que l'opérateur $\mathcal{H}_{v,\lambda}(\bar{v},\bar{\lambda},\bar{f})$ définie sur $L^2(I)\times\mathbb{R}$ est non dégénérée. En effet soit $(v,\lambda) \in L^2(I)\times\mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{aligned} \Psi^{"}(\bar{v})\cdot v + \lambda\ F &= 0 \qquad (22) \\ F(v) &= 0 \qquad (23) \end{aligned}$$

En multipliant par v dans (22) et en utilisant (23) on obtient :

$$c_0\|v\|^2_{L^2(I)} \leq \Psi^{"}(\bar{v}) \cdot v \cdot v = 0.$$

ce qui entraine que $v = 0$. En le repportant dans (22) on déduit que $\lambda = 0$. Ce qui prouve l'injectivité.

On se donne maintenant $(\varphi, \beta), \in \mathcal{L}(L^2(I), \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ et on cherche $(v, \lambda) \in L^2(I) \times R$ tel que :

$$\begin{aligned} \Psi^{"}(\bar{v}) \cdot v + \lambda\, F &= \varphi && (24)\\ F(v) &= \beta && (25) \end{aligned}$$

Puisque $\Psi^{"}(\bar{v})$ est non dégénérée (voir le *lemme* 3), on peut exprimer v en fonction λ à partir (24) et on le repporte dans (25). Ce qui donne

$$v = \Psi^{"}(\bar{v})^{-1}(\varphi) - \lambda\ \Psi^{"}(\bar{v})^{-1}(\ F) \tag{26}$$

$$F\Big(\ \Psi^{"}(\bar{v})^{-1}(\varphi)\Big) - \lambda\ F\Big(\ \Psi^{"}(\bar{v})^{-1}(\ F)\Big) = \beta \tag{27}$$

L'équation (27) donne λ si

$$F\Big(\ \Psi^{"}(\bar{v})^{-1}(\ F)\Big) \neq 0 \tag{28}$$

et c 'est exactement le cas. Pour cet effet posons :

$$w = \Psi^{"}(\bar{v})^{-1}(\ F) \tag{29}$$

alors w est non nul car F est non nul et $\Psi^{"}(\bar{v})$ est bijective. De (29) on en déduit :

$$F = \Psi^{"}(\bar{v})(w) \tag{30}$$

En l'utilisant dans (28), on obtient :

$$F\Big(\ \Psi^{"}(\bar{v})^{-1}(\ F)\Big) = \Psi^{"}(\bar{v}) \cdot w \cdot w \geq c_0\|w\|^2_{L^2(I)} > 0 \tag{31}$$

ce qui prouve la surjectivité. Donc le *théorème des fonctions implicites* s'applique au point $(\bar{v}, \bar{\lambda}, \bar{f})$. D'où il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de $\bar{f}$ dans $L^2(I)$ et une unique fonction $\Theta = (\ \Theta_1,\ \Theta_2)$ définie et différentiable sur $\mathcal{U}$ à valeurs dans $L^2(I) \times \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{aligned} \Theta(\bar{f}) &= (\bar{v}, \bar{\lambda}) && (32)\\ \mathcal{H}(\ \Theta(f), f) &= 0,\ \forall\, f\, \in \mathcal{U} && (33) \end{aligned}$$

De l'unicité de Θ, on en déduit que $G = \Theta_1$ sur $\mathcal{U}$ car la fonction $(\ G,\ \Theta_2)$ vérifie (33) sur $\mathcal{U}$ où G est la fonction définie par (5). Ce qui prouve la différentiabilité de G.■

3 Conditions nécessaires et suffisantes

3.1 Conditions nécessaires

Théorème 2 *Sous l'hypothèse* (7)*, il existe une fonction* $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, continue et positive, une fonction* $\varphi : L^2(I) \to \mathbb{R}$ *différentiable vérifiant :*

$$D_f\,[\,G(f)(t)] \;=\; A\left(\int_0^t f(s)\,ds + \varphi(f)\right)\left[\mathcal{X}_{[0,t]} + \varphi'(f)\right] \qquad \forall\, f \in L^2(I),\ \forall\, t \in I. \tag{34}$$

$$\int_0^T G(f)\,ds = u_1 - u_0,\ \forall\ f\ \in\ L^2(I). \tag{35}$$

En outre on a :

$$G(0)(t) = u_0,\ \ \textit{pour presque tout}\ t\ \in\ I. \tag{36}$$

Où pour tout $t\ \in\ I$*,* $D_f\,[\,G(f)(t)]$ *désigne la dérivée par rapport à* f *de l'application :*

$$f\ \in\ L^2(I) \to\ G(f)(t)$$

Preuve. Soit $G : L^2(I) \longrightarrow L^2(I)$ telle : $\forall f \in L^2(I)$

$$u_f(t) := u_0 + \int_0^t G(f)(s)\,ds, \quad \forall t \in [0, T]$$

soit l'unique solution de (P_f). Donc pour tout $f\ \in\ L^2(I)$, u_f satisfait l'équation d'*Euler-Lagrange* :

$$\frac{d}{dt}\left[L'(\ G(f)(t))\right] = f(t), \quad \forall t \in [0, T] \tag{37}$$

ou encore, il existe une fonction $\varphi : L^2(I) \to \mathbb{R}$ dérivable telle que :

$$L'(\ G(f)(t)) = \varphi(f) + \int_0^t f(s)\,ds, \forall\, f \in L^2(I),\ \forall\, t \in\ I, \tag{38}$$

$$\varphi(f) = L'(\ G(f)(0)),\ \ \forall\, f \in L^2(I). \tag{39}$$

D'aprés l'hypothèse (7), L est C^2 et strictement convexe sur I, donc sa dérivée L' est inversible et de plus grâce à l'identité de *Fenchel* on a :

$$(L')^{-1} = (L^*)' \tag{40}$$

où L^* est la transformé de *Fenchel* de L. En le repportant dans (38) on obtient :

$$G(f)(t) = (L^*)' \left(\int_0^t f(s)\, ds + \varphi(f) \right), \ \forall f \in L^2(I) \ \forall t \in [0,T] \qquad (41)$$

Pour t fixé dans $[0,1]$, en différentiant (41) par rapport à f, on obtient :

$$D_f\, [\, G(f)(t)] \cdot h \;=\; (L^*)'' \left(\int_0^t f(s)\, ds + \varphi(f) \right) \left[\int_0^t h(s)\, ds + < \varphi'(f), h > \right]$$

$$\forall\, f, h \in L^2(I), \ \ \forall t \in I.$$

On pose : $A = (L^*)^{"}$. Alors A est continue et positive puisse que L est C^2 et strictement convexe et on a :

$$D_f\, [\, G(f)(t)] = A \left(\int_0^t f(s)\, ds + \varphi(f) \right) \left(\mathcal{X}_{[0,t]} + \varphi'(f) \right), \ \ \forall t \in [0,T], \ \forall\, f \in L^2(I).$$

où $\mathcal{X}_{[0,t]}$ est la fonction caractéristique de $[0,t]$.

Soit u la solution associée à $f = 0$, elle vérifie donc :

$$\frac{d}{dt} L'(\dot{u}) = 0 \qquad (42)$$

ce qui implique que l'application $t \to L'(\dot{u}(t))$ est constante sur I. Comme L' est inversible, on en déduit que $\dot{u}$ est constante presque partout sur I. Il existe donc une constante $c_0 \in \mathbb{R}$ telle que $\dot{u}(t) = c_0$ pour presque tout $t \in I$. En utilisant le fait que $u(0) = u_0$ et $u(T) = u_1$, on retrouve (36). Pour terminer, on remarque que (35) est juste une conséquence de la définition de l'opérateur G.■

3.2 Conditions suffisantes

Théorème 3 *Soitent $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ et $T > 0$ un nombre réel strictement positif. On pose $I = [0,T]$. Soit G un opérateur défini et différentiable de $L^2(I)$ dans $L^2(I)$ vérifiant :*

$$\int_0^T G(f)(t)\, dt = u_1 - u_0, \ \forall\, f \in L^2(I) \qquad (43)$$

et il existe une constante $G_0 \in \mathbb{R}$ telle que :

$$G(0)(t) = G_0, \ \textit{pour presque tout}\ t \in I. \qquad (44)$$

On suppose qu'il existe une fonction $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et strictement positive, une fonction $\varphi : L^2(I) \to \mathbb{R}$ Fréchet- différentiable telles que :

$$D_f\, [\, G(f)(t)] = A\left(\int_0^t f(s)\,ds + \varphi(f)\right)\left(\mathcal{X}_{[0,t]} + \varphi'(f)\right), \ \ \forall f \in L^2(I), \ \forall t. \quad (45)$$

Alors il existe une fonction L définie sur $\mathbb{R}$, de classe C^2 et convexe telle que : pour $f \in L^2(I)$, la fonction de $H^1(I)$, u_f définie par :

$$u_f(t) = u_0 + \int_0^t \ G(f)(s)\,ds \quad (46)$$

est solution du problème de calcul des variations :

$$\begin{cases} \inf\limits_u \displaystyle\int_0^T \left[L(\frac{du}{dt}) - f(t)u(t)\right] \,dt \\ u(0) = u_0,\, u(T) = u_1 \end{cases} \quad (47)$$

Preuve. Soit K une solution de :

$$\begin{cases} K''(t) = A(t) \ \text{ sur } \mathbb{R} \\ \\ K'(\varphi(0)) = G_0. \end{cases} \quad (48)$$

Donc K est C^2 et strictement convexe sur $\mathbb{R}$. Par conséquent (45) devient :

$$D_f\, [\, G(f)(t)] = K''\left(\int_0^t f(s)\,ds + \varphi(f)\right)\left(\mathcal{X}_{[0,t]} + \varphi'(f)\right), \ \ \forall f \in L^2(I), \ \forall t. \quad (49)$$

Donc il existe $c(t) \in \mathbb{R}$ tel que :

$$G(f)(t) = K'\left(\int_0^t f(s)\,ds + \varphi(f)\right) + c(t) \ \ \forall f \in L^2(I), \ \forall t \in I. \quad (50)$$

En utilisant (48) et (44), on en déduit que $c(t) = 0$. Pour cet effet prenons $f = 0$ dans (50), on obtient alors

$$c(t) = \ G(0)(t) - K'(\varphi(0)) = 0, \ \forall t \in I. \quad (51)$$

K étant convexe donc il existe une fonction L au moins de classe C^2 telle que $L^* = K$, où L^* est la transformée de *Fenchel* de L. De plus K' est inversible et on a :

$$\left(K'\right)^{-1} = L'. \quad (52)$$

En repportant (52) dans (50), on aboutit à :

$$L'(\ G(f)(t)) = \int_0^t f(s)\,ds + \varphi(f), \ \ \forall f\ \in\ L^2(I), \forall t\ \in\ I \qquad (53)$$

ou encore

$$\frac{d}{dt}\left[L'(\ G(f)(t))\right] = f(t), \ \text{ pour presque tout } t\ \in\ I. \qquad (54)$$

Donc pour tout $f\ \in\ L^2(I)$, la fonction u_f définie par (46) vérifie l'équation d'*Euler-Lagrange* associée au problème (47). Comme la fonction L est convexe donc u_f est solution de (47). Ce qui prouve le théorème. ■

Références

[1] I. Anderson and G.Thompson, *The Inverse Problem of the Calculus of Variations for Ordinary Differential Equations*, Amer. Math. Soc. 98 (473).

[2] V Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Naouk, Moscow, 1965 French translation, Editions de Moscou, 1968 ; English translation, Springer, 1975)

[3] O.Bolza, *Lectures on the Calculus of Variations*, Dover Press, New York, N.K., 1960, pp.31-32.

[4] G.Buttazzo, M. Giaquinta , S.Hildebrandt, *Calculs of Variation I*, Springer, 1994

[5] G.Buttazzo, M. Giaquinta , S.Hildebrandt, *One-dimensional Variational Problems , an Introduction*, Clarendon Press.Oxford, 1998

[6] J.DOUGLAS, *Solution of the Inverse Problem of the Calculus of Variations*, Trans. Amer. Math. Soc. 50 (1941), 71-128.

[7] I.Ekeland, J.P.Aubin, Applied Nonlinear Analysis, Wiley, 1984, 520p.

[8] I.Ekeland and R.Temam, *Convex analysis and Variational Problems*, SIAM Classics In Applied Mathematics, 1999

[9] I.Ekeland and R.Temam, *Analyse convexe et Problèmes variationnels*, Dunod-Gauthier-Villars, 1974, 340p.

[10] I.Ekeland, T.Turnbull, *Infinite-dimensional optimization and convexity* Chicago Press, 1983.

[11] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, 1964