UNIVERSITE PARIS DAUPHINE

Laboratoire d'Analyse et Modélisation de Systèmes pour l'Aide à la Décision

CNRS UMR 7024

CAHIER DU LAMSADE

276

Juillet 2008

Robustesse en aide multicritère à la décision

Hassène Aïssi, Bernard Roy

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

TABLE DES MATIÈRES

Robustesse en aide multicritère à la décision

Hassene Aissi, Bernard Roy

LAMSADE, Université Paris-Dauphine, France
{aissi,roy}@lamsade.dauphine.fr

Résumé

Après avoir précisé le sens que l'on donne dans ce chapitre à quelques termes (robustesse, résultat, procédure, méthode,…), on met en évidence les principales caractéristiques de la majorité des publications qui traitent de robustesse. Ce n'est qu'après avoir apporté des éléments de réponse à la question « pourquoi la robustesse est un sujet de préoccupation en aide multicritère à la décision (AMCD) ? » (cf. section 2) que l'on précise le plan de ce chapitre. On introduit au préalable le concept de jeux de valeurs, lequel sert de trait d'union entre ce que l'on définit comme la représentation formelle du problème et la réalité vécue. On introduit également cinq problèmes types qui nous serviront de référence par la suite. La section 3 traite des approches récentes qui font intervenir un unique critère de robustesse qui vient compléter (mais non lui être substitué) un système de préférences préalablement défini indépendamment de la préoccupation de la robustesse. La section suivante concerne le cas où la préoccupation de robustesse est modélisée à l'aide de plusieurs critères. La dernière section, avant la conclusion, concerne les approches dans lesquelles la robustesse est appréhendée autrement qu'en explicitant un ou plusieurs critères destinés à comparer des solutions. Ces approches conduisent généralement à faire intervenir une ou plusieurs propriétés destinées à caractériser les solutions qualifiées de robustes ou encore à asseoir des conclusions robustes. Dans ces trois dernières sections, diverses nouvelles voies de recherche sont envisagées.

Robustness in Multi-Criteria Decision Aiding

Abstract

After bringing precisions to the meaning we give to several of the terms used in this paper (e.g., robustness, result, procedure, method), we highlight the principal characteristics of most of the publications about robustness. Subsequently, we present several partial responses to the question "why robustness is a matter of interest in Multi-Criteria Decision Aiding (MCDA)?" (see Section 2). Only then do we provide an outline for this paper. At this point, we introduce the concept of *variable settings*, which serves to connect what we define as the formal representation of the decision aiding problem and the real-life decisional context. We then introduce five typical problems that will serve as reference problems in the rest of the paper. Section 3 deals with recent approaches that involve a single robustness criterion completing (but not replacing) a preference system that has been defined previously, independently of the robustness concern. The following section deals with approaches in which the robustness concern is modelled using several criteria. Section 5 deals with the approaches in which robustness is considered other than by using one or several criteria to compare the solutions. These approaches generally involve using one or several properties destined to characterize the robust so-

lution or to draw robust conclusions. In these last three sections, diverse new directions for research are envisioned.

1. Introduction

En Aide MultiCritère à la Décision (AMCD), il est de plus en plus question de robustesse, aussi bien dans les travaux publiés dans les grandes revues scientifiques que dans ceux (souvent moins formels) conduits en entreprise pour traiter un problème spécifique. Le qualificatif « robuste » est employé en AMCD avec des significations multiples qui prêtent à débat (voir à ce sujet, dans la référence Bulletin (2002-2007), les contributions de Aloulou *et al.* (n° 12, 2005), Dias (n° 13, 2006), Fernandez Barberis (n° 13, 2006), Pictet (n° 15, 2007), Rios Insua (n° 9, 2004), Rosenhead (n° 6, 2003), Roy (n° 6, 2002), Roy (n° 8, 2003), Sayin (n° 11, 2005), Sevaux, Sörensen (n° 10, 2004), Vincke (n° 8, 2003)). Cette suite de points de vue met en lumière le caractère polysémique de la notion de robustesse, lequel provient notamment du fait que cette notion peut, selon les cas, être apparentée (voire assimilée) à celle de flexibilité, stabilité, sensibilité et même équité.

Dans cet article, nous utilisons le terme **robuste** en tant que qualificatif se rapportant à **une aptitude à résister à des « à peu près » ou à des « zones d'ignorances » afin de se protéger d'impacts jugés regrettables, notamment dégradation de propriétés à préserver** (cf. Roy, 2005). Les travaux qui traitent de robustesse cherchent à satisfaire (aussi bien que faire se peut) à cette aptitude. La robustesse relève par conséquent d'une démarche qui répond à une préoccupation : être apte à résister…, à se protéger…

Nous emploierons ici l'expression **préoccupation de robustesse** plutôt que celle d'analyse de robustesse. Cette expression peut faire penser à un travail qui est effectué *a posteriori*. C'est par exemple ce qui se produit avec une analyse de sensibilité. La robustesse répond le plus souvent à une préoccupation qui doit intervenir *a priori* dès la formulation même du problème (ceci n'exclut pas de recourir à une analyse de sensibilité pour répondre, le cas échéant, à cette préoccupation).

Dans la prochaine section, nous nous efforçons d'approfondir et d'expliciter les multiples raisons d'être de cette préoccupation. Nous nous situerons ensuite dans une optique essentiellement multicritère (qui est celle du présent article). Nous montrerons que la façon d'articuler robustesse et critères multiples peut prendre des formes variées. Ceci nous amènera à présenter le plan de la suite de ce chapitre. Il nous faut au préalable apporter quelques précisions et faire quelques rappels.

Précisons tout d'abord brièvement le sens que nous donnons à quelques termes (voir pour plus de détails Roy (2005)). Par **procédure *P***, nous désignons un ensemble de consignes d'exécution d'un mode de traitement d'un problème. On appelle **résultat** ce à quoi conduit P appliquée au problème lorsque celui-ci a été rigoureusement formulé. Ce résultat peut prendre diverses formes : solutions, paquets de solutions (possédant des propriétés requises) ou encore simples constats (il n'existe pas de solution ayant telle propriété, telle solution est non dominée,…). Par **méthode *M***, nous désignons, à la suite de Vincke (1999a,b), une famille $\widehat{P}$ de procédures qui présentent suffisamment de traits communs (structure, démarche, concept, action ou hypothèse) pour ne se différencier que par la valeur qui peut être attribuée à certains paramètres ou encore par diverses options ayant trait à la façon dont certaines règles sont formulées en relation par exemple avec le rôle dévolu aux différents critères.

La grande majorité des publications qui traitent de robustesse utilise ce terme pour qualifier des solutions. Le qualitatif « robuste » est également utilisé pour qualifier un constat (ou conclusion), une méthode (cf. Billaut *et al.*, 2005 ; Roy, 1998, 2007 ; Vincke, 1999b,…).

Parmi les travaux qui visent à déterminer des solutions robustes, très nombreux sont ceux qui présentent les caractéristiques suivantes (cf. Roy (2007)).

i) Le problème traité relève de l'un des modèles standard de la recherche opérationnelle : job shop, flow shop, sac à dos, arbre couvrant, plus court chemin, voyageur de commerce, flot maximum, stable maximum, p-médian et p-centre en localisation,… et, bien sûr aussi, les modèles standard de programmation mathématique (notamment linéaire). Ces problèmes sont étudiés dans un contexte monocritère.

ii) Une famille de **scénarios** est définie en considérant la valeur de certains paramètres comme incertaine. Ces paramètres sont soit ceux qui entrent dans la définition du critère d'optimisation, soit ceux qui interviennent dans certaines des contraintes. On suppose que ces paramètres peuvent prendre soit un petit nombre de valeurs, soit toutes celles comprises dans un intervalle. Un scénario est défini en attribuant à chacun des paramètres incertains une des valeurs possibles.

iii) Sont qualifiées de robustes celles des solutions réalisables qui optimisent un critère $r(x)$ pris comme mesure de la plus ou moins grande robustesse de la solution x. $r(x)$ est le plus souvent l'une des trois mesures introduites par Kouvelis et Yu (1997). Nous en rappelons ci-après les définitions (nous en aurons besoin par la suite).

Ces mesures font intervenir le critère v d'optimisation du modèle standard considéré. Celui-ci attribue à x une valeur $v_s(x)$ dans le scénario s. On suppose ici que optimum signifie maximum.

– *Robustesse absolue*. La mesure de robustesse (qu'il s'agit ici de maximiser) est définie par la valeur que prend la solution dans le pire scénario : $r(x) = \min_s v_s(x)$.

– *Déviation absolue*. La mesure de robustesse (qu'il s'agit ici de minimiser) est définie par la valeur que prend, dans le pire scénario, le regret absolu qu'occasionne le fait que la solution diffère de celle qui serait optimale dans ce scénario : $r(x) = \max_s \left[v_s^* - v_s(x)\right]$ (v_s^* : valeur que prend la solution optimale dans le scénario s).

– *Déviation relative*. La mesure de robustesse (qu'il s'agit ici de minimiser) est définie par la valeur que prend, dans le pire scénario, le regret relatif qu'occasionne le fait que la solution diffère de celle qui serait optimale dans ce scénario : $r(x) = \max_s \dfrac{v_s^* - v_s(x)}{v_s^*}$.

2. Raisons d'être de la préoccupation de robustesse en AMCD

Dans une perspective d'aide à la décision, c'est à notre sens le souhait de tenir compte, autant que faire se peut, de notre ignorance qui est la raison d'être de la préoccupation de robustesse. Dans cette perspective, il ne faut jamais perdre de vue que les décisions que l'on cherche à éclairer seront :

1°) mises à exécution dans un contexte réel qui ne peut pas être rigoureusement conforme au modèle sur lequel l'aide prend appui ;

2°) jugées en faisant référence à un système de valeurs qui paraîtra pertinent (et pas nécessairement stable) dans un futur qui peut ne pas être bien défini, système de valeurs qui, par conséquent, risque de ne pas être tout à fait en accord avec celui qui a été utilisé pour concevoir et exploiter le modèle.

Il y a là deux raisons d'être de manque de conformité et donc d'écart entre :

– d'une part la **représentation formelle** (RF) constituée par le modèle et les procédures de traitement qui lui sont appliquées ;
– d'autre part la **réalité vécue** (RV) dans le cadre de laquelle la ou les décisions prises seront mises à exécution et jugées.

« Etat de la nature » ou « état du monde » pourrait être utilisé à la place de "réalité vécue". Cette dernière expression nous paraît toutefois préférable en aide à la décision car, moins générale, elle fait explicitement référence au contexte dans lequel la décision sera réellement vécue.

En aide à la décision, il importe donc de chercher à prendre en compte les à peu près, les zones d'ignorances qui sont responsables du fait que la représentation formelle ne peut pas être rigoureusement conforme à la réalité vécue : RF≠RV. Dans cette section, nous allons illustrer (sans prétendre à l'exhaustivité) ces à peu près et zones d'ignorances.

Les à peu près et zones d'ignorances vis-à-vis desquels la préoccupation de robustesse vise à se protéger apparaissent, dans la représentation formelle, sous forme de ce que Roy (2005) a proposé d'appeler des **points de fragilité**. La représentation formelle adoptée comme formalisation du problème peut être examinée selon les quatre points de vue ci-après pour mettre en évidence ces points de fragilité.

i) *Façon dont est traitée la mauvaise connaissance* : soit en la négligeant (données traitées comme certaines), soit en la modélisant avec une part d'arbitraire par une distribution de probabilités, des nombres flous, des seuils,…, cela au travers de la procédure de traitement dans le cas où celle-ci a précisément été conçue pour prendre en compte des données imprécises, ambiguës, voire non nécessairement cohérentes ou complètes.

ii) *Signification préférentielle discutable, voire abusive, attribuée à certaines données* : passage injustifié du qualitatif ou du numérique au quantitatif, signification inappropriée attribuée à des mesures dites objectives, données élaborées dans le cadre d'une procédure de questionnement,…

iii) *Façon de modéliser (notamment en choix de paramètres) utilisée pour prendre en compte un aspect complexe de la réalité difficile à appréhender car imparfaitement défini* : jeux de poids, mesures de capacité, fonctions d'utilité, niveaux de référence ou d'aspiration,…

iv) *Présence de paramètres essentiellement techniques ou de règles de sélection n'ayant pas ou peu de signification concrète (par exemple imposés par la procédure de traitement)* : écart minimum servant à garantir le caractère strict d'inégalité, bornes servant à délimiter un domaine d'investigation, paramètres intervenant dans le déroulement d'une méta heuristique, règles de sélection d'une solution parmi plusieurs pouvant être envisagées (solutions situées au voisinage d'un optimum).

Se préoccuper de robustesse, c'est, en tout premier lieu, identifier ces points de fragilité dans RF. Ceux-ci dépendent bien évidemment de la façon dont le problème d'aide à la décision a été formulé puis modélisé. Ils peuvent aussi dépendre des procédures de traitement qui vont être utilisées. D'une façon générale, ces points de fragilité apparaissent comme connectés à des sources de contingence, d'incertitude ou d'arbitraire (cf. Roy, 1989 ; Roy, 2005, section 2.2). Les quatre points de vue qui précèdent (croisés avec ces sources qui se situent à un niveau supérieur) sont, nous croyons, de nature à aider le chercheur opérationnel à inventorier ces points de fragilité lorsqu'il est confronté à un problème concret.

Asseoir cet inventaire en ne s'intéressant qu'à ce qui reflète la présence d'une incertitude dans RF peut, dans bien des cas, conduire à laisser de côté un certain nombre de points de fragilité. Le terme « incertitude » ne couvre que très imparfaitement toutes les formes d'à peu près et de zones d'ignorances vis-à-vis desquels il s'agit de résister. C'est le cas par exemple pour les à peu près qui découlent de simplifications, de mauvaises déterminations ou d'options arbitraires. C'est de même le cas pour des zones d'ignorances qui proviennent de mauvaises connaissances relatives à la complexité de phénomènes ou de systèmes de valeurs.

Circonscrire la préoccupation de robustesse à la prise en compte d'incertitudes va généralement de pair avec un mode d'appréhension des relations entre représentation formelle et réalité vécue fondé sur le concept de scénario (cf. fin de section 1, ii). Envisagée dans cette optique quelque peu réductrice, la recherche de robustesse repose sur la définition d'une famille finie ou infinie de scénarios. **Cette famille doit permettre d'internaliser dans RF les différentes réalités vécues qui méritent d'être considérées** : c'est l'incertitude dans laquelle on est d'attribuer une vraie valeur à certaines données ou paramètres qui oblige à considérer ces différentes réalités. Chaque scénario est ainsi défini en attribuant une valeur précise aux données et paramètres en question.

Roy (2004, 2005) a montré que, pour bien répondre à la raison d'être des préoccupations de robustesse, il était souhaitable de dépasser cette vision réductrice. Si l'on ne veut pas circonscrire la recherche de robustesse à la seule prise en compte d'incertitudes, il convient de s'affranchir du concept de scénario (lequel peut, de plus, être source de malentendus dans certains milieux professionnels). Roy a proposé de le remplacer par celui de **version** de la formulation du problème d'aide à la décision. Chaque version est définie à partir d'une combinaison d'options relatives aux points de fragilité du modèle. Elle représente une réalité méritant d'être considérée. La famille de versions ainsi définie peut en outre, dans certains cas, être insuffisante pour appréhender les relations entre RF et RV. Cela tient au fait que la préoccupation de robustesse peut rendre nécessaire que soit prises en compte non pas une seule procédure de traitement mais toutes celles d'une certaine famille. Les points de fragilité qui rendent nécessaire la prise en compte d'une telle famille peuvent provenir aussi bien de l'existence de paramètres techniques entrant dans la définition des procédures que de la personnalité des experts à qui l'on s'en remet pour effectuer le traitement du modèle (cf. Roy, 2005). Il peut même arriver que la préoccupation de robustesse ne fasse intervenir qu'une seule version de la formulation du problème à laquelle il s'agit d'appliquer la famille de procédures.

Dans cette vision élargie de la préoccupation de robustesse, il convient donc de substituer, à la famille de scénarios, une famille constituée de tous les couples (**procédure**, **version**) jugés pertinents. Un tel couple (p,v) est défini par l'ensemble des valeurs et options qui caractérisent la procédure p et la version v considérées. Dans ce qui suit, nous noterons $s=(p,v)$ un couple quelconque jugé pertinent. Pour le désigner nous emploierons l'expression **jeux de** valeurs (variable settings en anglais, cf. par exemple Salazar et Rocco, (2007).

Nous noterons S l'ensemble des jeux de valeurs s jugés pertinents. Lorsque la préoccupation de robustesse ne prend appui que sur une procédure unique, S n'est autre qu'un ensemble de versions et, dans bien des cas, qu'un ensemble de scénarios. Lorsque, à l'opposé, on s'intéresse à la robustesse d'une méthode relativement à une unique version v d'un problème, S n'est autre que la famille $\widehat{P}$ des procédures caractéristiques de cette méthode. Dans tous les cas, S est le truchement par lequel on internalise, dans la représentation formelle RF, les différentes réalités vécues RV que la préoccupation de robustesse conduit à prendre en considération.

$\forall s=(p,v)\in S$, la procédure p appliquée à la version v conduit à un résultat que nous noterons $R(s)$. Ce résultat peut revêtir des formes extrêmement variées et non exclusives comme nous l'avons suggéré dans l'introduction.

Lorsque S est fini, on peut, dans certains cas, vouloir associer, à chaque élément $s\in S$, une probabilité subjective : celle-ci doit refléter les chances attribuées à s pour que ce jeu de valeurs décrive correctement ce que sera la réalité vécue. On dira dans ce cas que S est probabilisé.

Afin de mettre en évidence de façon plus concrète l'intérêt de la préoccupation de robustesse en aide **multicritère** à la décision, nous allons maintenant décrire sommairement quelques problèmes types choisis (de façon assez arbitraire) parmi beaucoup d'autres.

Problème 1 : Choix d'un fournisseur suite à un appel d'offres pour l'acquisition et l'installation d'un nouvel équipement

Supposons qu'une quinzaine de réponses aient été reçues et que chacune soit évaluée sur les cinq critères suivants : coût, délai, niveaux de satisfaction relatifs à deux types de performances, confiance accordée au fournisseur quant à son aptitude à respecter les délais et le cahier des charges. Les à peu près et zones d'ignorances affectent ici la façon dont les réponses reçues sont évaluées sur ces cinq critères ainsi que le rôle qu'il convient de faire jouer à chacun d'eux (autrement dit poids respectif et veto éventuel). Le chercheur peut ainsi être conduit à retenir, pour certaines des réponses, non pas une seule évaluation pour un critère donné mais deux ou trois. En les combinant, il peut définir un ensemble V de versions du problème. Si, pour l'aide à la décision, il a recours à une méthode de type ELECTRE, il peut vouloir prendre en compte plusieurs jeux de poids et lorsque, pour un critère, la présence d'un seuil de veto est justifiée, retenir deux ou trois valeurs. Ceci peut le conduire à définir un ensemble P de procédures. S est alors défini par le produit cartésien $P \times V$. On pourrait aussi bien regarder les différents jeux de poids comme servant à différencier les versions. La définition de S n'en serait pas pour autant modifiée.

Le décideur peut ici attendre du chercheur qu'il lui propose une sélection d'un nombre d'offres aussi restreint que ces à peut près et zones d'ignorances lui permettent accompagnées, pour chacune d'elles, des arguments qui justifient qu'elles soient sélectionnées. L'argumentaire doit par exemple permettre de faire comprendre au décideur dans quelles conditions (hypothèses relatives ou à peu près et zones d'ignorances) l'offre considérée s'avère au moins aussi bonne que n'importe quelle autre tout en explicitant les risques qu'elle peut lui faire courir si ces conditions ne sont pas satisfaites.

Problème 2 : Fixation des caractéristiques structurelles d'un réseau d'assainissement dans une commune qui en est dépourvue

Arrêter de façon optimale la valeur à donner à ces caractéristiques nécessite de connaître de façon suffisamment précise les besoins auxquels il s'agit de satisfaire tout au long de la durée de vie escomptée pour le réseau. Ces besoins sont en fait très mal connus car ils dépendent de multiples facteurs : évolution de la population, de ses habitudes de consommation, implantation de nouvelles activités, évolution de la réglementation des rejets,… Si le chercheur envisage de formuler le problème en termes d'optimisation d'un critère unique, il ne peut restreindre ce critère à la seule prise en compte des coûts prévisionnels de construction et d'entretien du réseau. Il lui faut aussi prendre en compte les coûts que pourront entraîner son adaptation à des besoins qui s'avèreraient impossibles à satisfaire sans modifier les caractéristiques structurelles initialement arrêtées. Il lui faut également prendre en compte les préjudices qu'occasionneraient les surcoûts de construction initiale et d'entretien si les besoins s'avéraient à terme inutilement surestimés. Ceci montre que la formulation d'un critère unique d'optimisation se heurte ici à de sérieuses difficultés. Même si le chercheur opérationnel peut trouver le moyen de les surmonter et de concevoir une famille de scénarios appropriée, il n'est pas évident que cette façon de formuler le problème d'aide à la décision soit la mieux adaptée pour répondre aux attentes du décideur. Attendre en effet que la décision soit robuste, c'est la vouloir telle que, le moment venu, elle puisse être justifiée comme étant une bonne décision et que, sauf circonstances considérées comme imprévisibles, aucun cas de grave insatisfaction des besoins ne se produise. Cet exemple montre que, dans certains cas, la préoccupation de robustesse peut devoir jouer un rôle déterminant dans la formulation même du problème d'aide à la décision (prise en compte notamment de critères multiples).

Problème 3 : Planning d'affectation du personnel navigant aux vols d'une compagnie aérienne

La préoccupation de robustesse incite par exemple à chercher à être apte à faire face à l'indisponibilité non prévue d'équipes (maladie, immobilisation en cours de mission,…) aussi bien qu'à des modifications de plans de vol (avion d'un autre type que celui initialement prévu,…). Comment faire face à ces aléas en prenant en compte deux points de vue qui peuvent être conflictuels :

- la compagnie aérienne qui cherche un optimum économique dans le cadre d'une législation très complexe qui lui laisse quelques marges d'appréciation ;
- celui du personnel qui exprime des souhaits qu'il aimerait voir satisfaits et vit généralement assez mal les perturbations de planning.

Problème 4 : Conduite de la réalisation d'un grand projet

On dispose de divers logiciels prenant appui sur des méthodes variées pour établir un planning prévisionnel de réalisation. L'utilisation de ces logiciels nécessite de prendre en compte de multiples données : durée des tâches, délai de livraison des fournisseurs, disponibilité d'ouvriers spécialisés, aspects climatiques,… La réalité dans laquelle les travaux se dérouleront peut ne pas correspondre à la valeur initiale prévue pour chacune de ces données. Le coût de réalisation ainsi que le délai d'achèvement peuvent s'en trouver fortement modifiés. Ce sont là deux critères qu'il convient de prendre en compte pour guider le choix d'un planning prévisionnel susceptible de résister au mieux aux à peu près et zones d'ignorances qui affectent les données, résister au mieux pouvant signifier ici offrir la possibilité d'adaptations locales acceptables.

Problème 5 : Fiabilité d'un système complexe

Considérons le cas d'un système complexe dont la fiabilité dépend de la valeur qui va être attribuée à certaines variables au cours de sa conception. Toutefois, le lien entre les valeurs retenues et la fiabilité qu'aura chacune des grandes composantes du système est fort complexe et, par suite, imparfaitement connu. De surcroît, le lien entre les valeurs retenues et la fiabilité du système global est encore moins bien maîtrisé. Dans ces conditions, il peut être pertinent, pour éclairer la décision relative au choix de ces valeurs qui doit être prise au cours de la conception, de prendre en compte autant de critères de fiabilité qu'il y a de grandes composantes dans le système.

Les exemples précédents (auxquels nous ferons référence par la suite) ont mis en évidence le caractère souvent multicritère du modèle de préférence qui peut être approprié pour guider le choix d'une solution. Dans ces exemples, aucun critère n'a été envisagé pour apprécier la plus ou moins grande robustesse d'une solution. C'est en général de cette façon que les préférences du décideur sont modélisées (*a fortiori* lorsqu'il n'y a qu'un seul critère). Pour prendre en compte la préoccupation de robustesse, on peut envisager l'une des trois familles de possibilités suivantes :

a) Définir une mesure unidimensionnelle de robustesse permettant de donner sens aux assertions du type « la solution x est au moins aussi robuste que la solution

y ». Cette mesure est alors utilisée pour introduire un nouveau critère en relation avec un modèle de préférence défini préalablement indépendamment de la préoccupation de robustesse.

b) Appréhender la robustesse de façon multidimensionnelle de façon à ce qu'elle intervienne non pas au travers d'un seul critère mais de plusieurs. Ces critères peuvent alors constituer le modèle de préférence proprement dit ou encore venir compléter (comme au a) un modèle de préférence initial dont aucun critère ne traduit la préoccupation de robustesse.

c) Appréhender la robustesse autrement qu'en explicitant un ou plusieurs critères devant servir à comparer les solutions. Cette dernière famille de possibilités conduit, de façon plus ou moins explicite, à faire intervenir une ou plusieurs propriétés destinées à caractériser les solutions qui seront qualifiées de robustes ou encore à asseoir des énoncés de conclusions robustes. La définition de ces propriétés peut, dans certains cas, faire intervenir une ou plusieurs mesures de robustesse. Elles jouent alors le rôle de contrainte et non pas de critère de comparaison.

Les trois sections qui suivent traitent respectivement de chacune de ces trois familles de possibilités.

3. Robustesse en aide multicritère à la décision : approches monodimensionnelles

3.1 Caractérisation de cette famille d'approches

On s'intéresse ici aux approches qui conduisent à appréhender la préoccupation de robustesse en complétant un modèle de préférences préalablement défini sans lien direct avec cette préoccupation par une mesure de robustesse. Cette mesure de robustesse $r(x)$ est introduite pour donner un sens à l'assertion « la solution x est au moins aussi robuste que la solution y ».

On a rappelé en fin d'introduction les trois mesures définies dans Kouvelis et Yu (1997). Elles concernent le cas où le modèle de préférences préalablement défini est monocritère. La plupart des travaux qui ont utilisé l'une ou l'autre de ces mesures l'ont fait en substituant, au critère initial, le critère de robustesse qui découle de la mesure de robustesse retenue. C'est là une approche qui reste monocritère et qui, par conséquent, n'entre pas dans le cadre de cet article.

Dans la présente section, nous nous intéresserons aux travaux ou voies nouvelles dans lesquels cette mesure de robustesse est utilisée pour définir un nouveau critère qui vient s'ajouter au modèle de préférences initialement défini. Deux cas méritent d'être distingués selon que le modèle initial est monocritère (cf. 3.2) ou multicritère (cf. 3.3). Dans une dernière sous-section, nous présenterons une nouvelle approche applicable, dans des conditions que nous préciserons, aussi bien au cas monocritère qu'au cas multicritère.

3.2 Avec un modèle initial de préférence monocritère

Dans ce type d'approches, deux critères sont pris en compte pour guider le choix d'une solution. A côté du critère unique de préférence (gain, coût, durée,…), un critère de robustesse est ajouté afin de tenir compte des différents points de fragilité inhérents à la représentation formelle (RF). Saufs cas particulièrement favorables, ces deux critères étant conflictuels, ceci amène tout naturellement à s'intéresser à la frontière efficace ou à l'approcher au mieux.

Par hypothèse, le critère de préférence est ici conçu pour attribuer une valeur $v(x)$ à chaque solution x en négligeant les à peu près et les zones d'ignorances vis-à-vis desquels la robustesse a pour objet de se protéger. Pour définir $v(x)$ dans de telles conditions, on peut prendre appui sur les valeurs $v_s(x)$ que ce critère attribue à la solution x avec le jeu de valeurs $s \in S$. $v(x)$ peut par exemple être la médiane ou la moyenne arithmétique des $v_s(x)$ ou encore leur espérance mathématique si S est probabilisé. On peut aussi poser $v(x) = v_{s_0}(x)$, s_0 étant un jeu de valeurs qui caractérise une description de la réalité prise comme référence parce que jugé très vraisemblable. Dans ces conditions, la mesure de robustesse peut être une des mesures de robustesse de Kouvelis et Yu (cf. fin section 1) ou toute autre mesure jugée pertinente afin de capturer l'impact de la connaissance imparfaite.

Dans les approches monocritères classiques prenant en compte l'un quelconque des critères de Kouvelis et Yu, la robustesse se focalise sur le pire cas et n'accorde aucune importance aux performances de la solution dans les autres jeux de valeurs. Les approches envisagées dans cette sous-section visent à remédier à ces inconvénients en considérant simultanément la performance dans le pire cas ainsi que dans le cas moyen ou médian. Elles offrent ainsi au décideur la possibilité de choisir entre plusieurs solutions de compromis.

Ci-après, on présente quelques travaux, qui dans la littérature, relèvent de ce type d'approches.

Chen *et al.* (1996) se sont intéressés au problème de conception de systèmes industriels. La prise en compte des variations des propriétés de l'objet à concevoir sous l'effet de facteurs incontrôlables (par exemple température, humidité,…) a toujours été une préoccupation des concepteurs. Ces facteurs peuvent dégrader fortement la performance globale du système lors de son utilisation. Il est important d'intégrer ces possibilités de variation le plus tôt possible dans le processus de conception. Cela a l'avantage d'anticiper l'impact possible de ces variations afin de minimiser leurs effets sur la performance globale du système. Une solution est qualifiée de robuste si sa performance varie peu sous l'effet des facteurs causes de variations. Les variations possibles de la propriété du matériel sont modélisées par un ensemble de jeux de valeurs S probabilisé. Pour cette propriété, une valeur de référence ainsi qu'un voisinage défini autour de cette dernière sont donnés. Le critère de préférence du modèle initial est défini par l'espérance mathématique de la performance dans ce voisinage. Le critère de robustesse additionnel correspond à la variance de la performance dans ce même voisinage. Le décideur s'intéresse aux solutions offrant un compromis entre performance globale et robustesse.

Ehrgott et Ryan (2002) ont étudié le problème de "robustness of crew schedules at air New Zealand". Dans les systèmes actuels de gestion de la flotte aérienne, cette optimisation ne fait intervenir qu'un seul critère de coût. Ce critère $v(x)$ prend en compte les coûts dans l'hypothèse où le plan x est parfaitement respecté. En réalité, les sources d'aléas susceptibles de perturber le trafic sont nombreuses. Si les temps d'immobilisation au sol ne sont pas suffisants pour résister à ces perturbations, le plan x ne sera pas respecté. Cela occasionnera des pénalités pour les compagnies aériennes. Ces pourquoi celles-ci sont également intéressées par des solutions robustes, aptes à résister au mieux à ces perturbations. L'optimisation du seul critère $v(x)$ conduit à des solutions qui ne peuvent être regardées comme robustes car elles minimisent obligatoirement les temps d'immobilisation au sol. Les auteurs ont considéré qu'une solution pouvait être jugée d'autant plus robuste que le total des pénalités qu'occasionneront les retards probables sera plus faible. Ils ont donc introduit, à côté du critère $v(x)$, un critère de robustesse r(x) qui repose sur la somme des pénalités que les « retards prévisibles » sont susceptibles d'occasionner. Ces retards prévisibles sont introduits, pour chaque vol, à partir d'observations statistiques qui ont permis de définir un retard moyen et un écart type. Le retard prévisible est défini comme le retard moyen augmenté de trois écarts types. Le jeu de retards ainsi construit constitue un unique jeu de valeurs s qui est pris en compte pour définir $r(x)$ comme somme des pénalités associées à chaque vol sur la base de cet unique jeu de valeurs. La frontière efficace est générée en utilisant la méthode ε-*contraintes*.

Salazar et Rocco (2007) se sont intéressés au problème de conception de systèmes fiables. La conception d'un produit se limite souvent, dans un premier temps, à trouver les caractéristiques en accord avec le cahier des charges. Néanmoins, la fiabilité du produit pourrait éventuellement varier en fonction de perturbations extérieures incontrôlables (vieillissement, variations d'environnement,…) ou en fonction de « *design variables* », ce qui peut s'avérer pénalisant. Dans ce contexte, la stabilité de la fiabilité joue un rôle important au même titre que le coût de conception. Afin d'illustrer la problématique, les auteurs considèrent le cas d'un système complexe formé de plusieurs composants. Il existe une relation, dont la formulation mathématique est complexe, entre la fiabilité du système et celle des différents composants. En fixant un intervalle d'admissibilité de la fiabilité globale, il est possible de déterminer, exactement ou de manière approchée, le domaine réalisable des fiabilités des différents composants. Il est clair que les points se trouvant près de la frontière de ce domaine sont moins intéressants que ceux se trouvant au centre car une petite variation des valeurs des points de fragilité peut faire sortir le système de l'intervalle de fiabilité admissible. Etant donné une valeur de la fiabilité du système, la robustesse est appréhendée d'une part par le volume du plus grand parallélépipède inclus dans le domaine réalisable et contenant cette valeur et, d'autre part, le coût correspondant au coût maximum dans ce volume. Le décideur s'intéresse aux solutions offrant un compromis entre le coût de conception et la stabilité de la fiabilité.

Kennington *et al.* (2001) ont étudié le problème « Dense Wavelength Division Multiplexing (DWDM) routing and provisioning ». La technologie DWDM est une technologie de transmission optique qui permet de faire circuler, sur une fibre optique, des données de différentes sources en leur affectant à chacune une longueur d'onde. Ainsi, en théorie, on peut transmettre en même temps plusieurs dizaines de flots de données différents. Les vitesses de transmission sont celles de la fibre optique : plusieurs milliards de bits par seconde. Etant donné un réseau et une estimation de la demande, le problème DWDM routing and provisioning vise à concevoir un réseau de fibre optique de moindre coût permettant d'acheminer les données vers les différents centres de demande. Toutefois, la prévision de la demande est souvent entachée d'erreurs. Une sous-estimation comme une surestimation de cette dernière peuvent avoir des conséquences fâcheuses. Dans cette étude, la mauvaise connaissance de la demande est prise en compte à travers un ensemble de scénarios probabilisé. La préoccupation de robustesse est prise en compte par une mesure de pénalité écartant les solutions offrant une capacité qui est significativement en dessous ou en dessus de la demande dans tous les scénarios. Cette mesure s'appuie sur des coûts subjectifs correspondant aux écarts positifs ou négatifs par rapport à la demande. Le coût d'installation et la mesure de robustesse permettent d'éclairer le décideur dans son choix. Comme la robustesse joue un rôle prépondérant, les auteurs ont ramené le problème bi-critère à un problème lexicographique.

Ces trois exemples montrent à quel point le critère de robustesse additionnel peut dépendre de la nature du problème étudié. Il ne paraît guère possible de formuler des règles qui aideraient à le concevoir. C'est au modélisateur de faire preuve d'imagination pour coller au mieux au problème qu'il a à traiter.

On suggère pour terminer cette sous-section une approche différente de celles qui viennent d'être décrites. On considère le cas où S est fini et $v(x)$ est défini soit à partir d'un jeu de valeurs de référence, soit comme moyenne ou médiane sur S. On peut adopter comme critère de robustesse l'un de ceux proposé par Roy (2007) sous les noms de bw-robustesse absolue, bw-deviation absolue et bw-deviation relative. On en présente ici un cas particulier qui nous semble être spécialement intéressant dans le cas de la conduite de projets (cf. problème 4, section 2). Ce critère de robustesse peut être défini comme la proportion ou la probabilité des jeux de valeurs $s \in S$ pour lesquels $v_s(x) \leq v(x) + \Delta$ où Δ est une constante donnée. Dans le cas de la conduite d'un grand projet, l'unique critère de préférence peut être un critère de coût intégrant les pénalités en cas de dépassement des délais. Dans cette approche, la frontière efficace ou une approximation de celle-ci paraît très intéressante pour le décideur. Il peut être utile d'étudier la sensibilité de cette frontière efficace aux variations de Δ.

3.3 Avec un modèle initial de préférence multicritère

Nous nous plaçons maintenant dans le cas où le modèle initial de préférence est multicritère (et non plus monocritère comme au 3.2). Notons F la famille de $n \geq 2$ critères ainsi définie en dehors de toute préoccupation de robustesse. Pour le $i^{\text{ème}}$ critère, la performance $v_i(x)$ peut être définie comme au 3.2. Ici encore, on s'intéresse à des approches qui font intervenir un critère additionnel unique pour donner sens à l'affirmation « la solution x est au moins aussi robuste que la solution y ».

Ce critère doit par conséquent synthétiser, sur une unique dimension révélatrice de la robustesse, l'impact des jeux de valeurs de S sur les performances de chacun des n critères de F. Nous n'avons trouvé dans la littérature aucune publication qui propose une telle mesure. Nous décrivons ci-après une voie possible.

Cette voie consiste à considérer dans un premier temps chacun des n critères isolément et à lui associer une mesure de robustesse qui lui soit spécifique (cf. 3.2). Pour définir le critère de robustesse additionnel, ces différentes mesures doivent, dans un second temps, être agrégées. Si ces critères sont exprimés sur une échelle commune, l'agrégation peut (moyennant quelques précautions) utiliser les opérateurs Max, OWA et même l'intégrale de Choquet pour différentier le rôle joué par les différentes mesures de robustesse. La frontière efficace étant ici à n+1 dimensions, il peut être préférable, pour $n \geq 3$, de chercher à agréger les critères du modèle de préférence initial afin de réduire la complexité du calcul et rendre l'interprétation des résultats plus aisée. Il faut noter que l'agrégation en un unique critère des n critères du modèle de préférence initial avant la définition du critère unique de robustesse rentre dans le cadre de l'approche définie dans la section 3.2 et constitue une approche différente de celle qui vient d'être envisagée.

3.4 Avec un modèle initial de préférence monocritère ou multicritère

L'approche que nous présentons ci-après n'est applicable que sur un ensemble fini A d'actions (ce terme étant ici substitué à celui de solutions) évaluées à l'aide d'un ou de plusieurs critères dans chacun des jeux de valeurs de l'ensemble S également supposé fini. Dans le cas d'un unique critère v, les valeurs $v_s(x)$ définissent sur A un préordre complet P_s, $\forall\ s \in S$. Dans le cas multicritère, on peut parvenir au même résultat (les préordres pouvant n'être aussi que partiels) en appliquant une procédure d'agrégation, par exemple de type ELECTRE. Soit P la famille de préordres complets ou partiels ainsi définie. On propose de définir la mesure de robustesse $r(x)$, associée à une action x, par la proportion (ou la probabilité si S est probabilisé) des préordres P_s de P dans lesquels x occupe un rang au plus égal à α où α définit un rang imposé. On peut également envisager de faire intervenir un autre rang imposé β afin de pénaliser les solutions très mal rangées dans certains jeux de valeurs. La mesure de robustesse $r(x)$ pourrait être définie en retranchant, de la mesure définie précédemment, la proportion (ou la probabilité) des P_s de P dans lesquels x occupe un rang au moins égal à β. Plus cette mesure est grande, plus l'action x est jugée robuste. Cette approche peut être très intéressante pour aider le décideur dans le choix d'un fournisseur suite à un appel d'offres (cf. problème 1, section 2). Il peut être utile d'étudier la sensibilité des résultats aux valeurs retenues pour α et β. Les résultats obtenus doivent pouvoir aisément être synthétisés en des conclusions robustes (cf. section 5) aisément intelligibles par le décideur.

4. Robustesse en aide multicritère à la décision : approches multidimensionnelles

4.1 Caractérisation de cette famille d'approches

On s'intéresse ici aux approches qui font intervenir non pas une seule mais plusieurs mesures pour prendre en compte la préoccupation de robustesse. Chacune de ces mesures a pour objet d'appréhender la robustesse selon un point de vue particulier. Ces mesures sont ici utilisées pour définir une famille R ($|R| > 1$) de critères devant servir à apprécier la plus ou moins grande robustesse d'une solution.

Pour présenter les travaux relevant de cette famille d'approches et esquisser quelques voies nouvelles, nous distinguons ci-après trois cas :

– la famille R constitue le modèle de préférences devant éclairer la décision en l'absence de tout autre modèle de préférences préalablement défini ;
– la famille R se substitue à ou complète un modèle de préférences monocritère initialement défini sans lien avec la préoccupation de robustesse ;
– la famille R se substitue à ou complète un modèle de préférences multicritère préalablement défini dont aucun des critères ne traduit une préoccupation de robustesse.

4.2 Sans modèle initial de préférence

De façon surprenante, nos investigations bibliographiques ne nous ont pas permis de découvrir des travaux relevant du type d'approches dont il est ici question. Comme on vient de l'indiquer, il s'agit de prendre en compte directement les préférences en définissant *a priori* une famille de critères dont chacun traduit un point de vue ayant trait à la robustesse sans que ces critères soient fondés sur un modèle de préférences multicritère initialement conçu sans lien avec la robustesse. Pourtant, l'un des auteurs a contribué (cf. Pomerol, Roy *et al.*,(1995) à l'élaboration et à la mise en œuvre d'une telle approche pour traiter un problème concret. Nous en donnons ci-après une présentation succincte.

Le contexte concret était celui d'une grande gare ferroviaire parisienne qui devait faire face à un intense trafic. Des perturbations mineures (tel un problème de fermeture de portes dû à l'encombrement) provoquaient fréquemment des retards. Des incidents plus graves (par exemple agent n'ayant pu prendre son poste à temps, avarie de matériel) pouvaient, malgré l'action des dispatchers qui intervenaient pour rétablir au plus vite un trafic normal, provoquer des effets en chaîne qui obligeaient à supprimer certains trains. De nouvelles grilles horaires ainsi que des aménagements locaux sur le réseau et sur le matériel roulant étaient envisagés. Leur combinaison a conduit à définir un ensemble X de solutions à étudier. L'étude avait pour objet de comparer la robustesse de ces solutions face à différents types de perturbations tout en tenant compte de la façon dont les dispatchers intervenaient pour atténuer autant que possible leurs effets négatifs. Un ensemble S, appelé « benchmark of incidence », a été construit. Sous ce nom, on désignait un ensemble d'incidents représentatif, chacun de ceux-ci étant décrit de façon précise et affecté d'un poids correspondant à cette fréquence d'apparition. La famille R a été constituée des six critères suivants :

$g_0(x)$: retard maximum, alloué au train dans la grille horaire, compatible avec l'absence de perturbation,
$g_1(x)$: nombre total des trains qui, en raison de l'incident, ont subi un retard avant que l'horaire initial ait pu rétabli,
$g_2(x)$: durée totale de la perturbation provoquée par l'incident,
$g_3(x)$: nombre total de voyageurs gênés par la perturbation,
$g_4(x)$: retard moyen des temps de trajet,
$g_5(x)$: nombre total de trains supprimés.

Les trois premiers de ces critères prennent en compte les points de vue qui sont ceux des opérateurs responsables de la circulation des trains tandis que les trois autres se rapportent à la satisfaction des voyageurs. La performance $g_0(x)$ est entièrement déterminée par la composante « grille horaire » qui entre dans la définition de x. Elle ne dépend en aucune façon des différents jeux de valeurs $s \in S$. Il en est différemment avec les cinq autres critères. $\forall x \in X,$ le calcul de la performance $g_j(x)$ pour $j \neq 0$ nécessite en outre de prendre en compte le comportement des dispatchers face à chacun des incidents présents dans S. Pour calculer ces performances, il a fallu faire intervenir un système expert reproduisant ce type de comportements.

Soulignons pour terminer que, dans ce type d'approches considéré ici, il est essentiel, de tester la cohérence de la famille R (vérification des propriétés d'exhaustivité, cohésion et non redondance, cf. Roy et Bouyssou, 1993 ; Roy, 1996). Cela tient au fait que le modèle de préférences est ici caractérisé par la famille R.

4.3 Avec un modèle initial de préférence monocritère

Ce nouveau type d'approches est caractérisé par une prise en compte de la préoccupation de robustesse au travers d'une famille R de plusieurs critères et non pas d'un seul comme au 3.2. Les critères de R doivent refléter des points de vues différents (non corrélés). Par conséquent, si l'un d'entre eux peut être pris parmi les trois proposés par Kouvelis et Yu (cf. section 1), il ne nous semble pas intéressant d'en faire intervenir un second compte tenu des dépendances qui existent entre ces critères.

On présente en premier lieu ci-après une approche conduisant à substituer les critères de robustesse à l'unique critère de préférence et, en second lieu, des approches différentes dans lesquelles les critères de robustesse viennent compléter le critère initial de préférence.

Hites *et al.* (2006) ont étudié les liens existant entre la préoccupation de robustesse et l'analyse multicritère. Les éléments de S étant regardés comme des scénarios, les auteurs ont proposé de substituer, à l'unique critère $v(x)$, la famille $R = \{v_s(x) / s \in S\}$. Chacun des critères ainsi défini apporte en effet une information pertinente pour juger la plus ou moins grande robustesse de la solution x. En considérant cette famille, les auteurs ont montré que la démarche fondée sur l'application d'une méthode multicritère classique n'était pas adaptée à la mise en évidence de solutions robustes. L'une des raisons tient à la cardinalité de S : les méthodes multicritères classiques ne sont adaptées qu'à des familles de critères comportant quelques dizaines de critères au plus. Lorsque le nombre de scénarios est faible (quelques unités), considérer la frontière efficace ou une approximation de cette dernière peut, dans certains cas, contribuer à répondre à la préoccupation de robustesse. Il est utile de remarquer que, dans toute autre approche du problème, une solution présentée comme robuste doit être nécessairement une solution non dominée dans le problème multicritère défini par l'ensemble R considéré ici.

Venons-en maintenant aux approches dans lesquelles il s'agit de compléter le critère de préférence par une famille R de critères. On présente tout d'abord ci-après, de façon succincte, le seul travail dont nous avons eu connaissance qui relève de ce type d'approches.

Jia et Ierapetritou (2007) ont étudié le problème de *« batch scheduling »* dans l'industrie chimique. Le procédé discontinu représente un mode idéal de fonctionnement pour synthétiser des produits chimiques en faibles ou moyennes quantités. Ce procédé présente l'avantage de pouvoir élaborer, par campagnes, plusieurs composés à partir d'équipements standard et de s'adapter à des variations de nature et de qualité des matières premières, ce qui constitue un atout majeur du point de vue de la flexibilité. Afin de s'assurer que toute ressource intégrée dans le processus de production est utilisée de manière efficace, il est important de prendre en compte, dans la phase de conception, un *« detailed plant scheduling »*. Etant donné :

- les recettes de production (durée de production de chaque tâche, quantités des matériaux entrant dans la fabrication des différents produits),
- la disponibilité et la capacité des équipements de production et de stockage,
- *production requirement*,
- un horizon d'étude,

l'objectif de la conception est de déterminer le nombre et le type d'équipements à utiliser et de construire un ordonnancement réalisable des opérations maximisant un critère de performance. Dans cette étude, ce critère correspond à la durée totale de production. Toutefois, lors de l'étape de conception, il est presque impossible d'obtenir une information précise sur les conditions de production. On ne dispose donc pas des informations nécessaires pour calculer ce que sera la performance de façon précise. Les diverses conditions possibles de production sont modélisées par un ensemble S de jeux de valeurs. Pour chacun d'eux, on peut calculer la durée de production qui lui est associée. Afin de quantifier l'effet des variations des conditions de production, deux critères additionnels sont considérés. Le premier tend à favoriser des solutions réalisables dans la plupart des jeux de valeurs en cherchant à minimiser l'espérance mathématique de la demande insatisfaite. Le deuxième vise à mesurer la stabilité de la performance de la solution en cherchant à minimiser l'espérance mathématique de la déviation positive entre la durée et la valeur espérée de cette durée. L'avantage principal de cette mesure par rapport à la variance est sa simplicité puisque cette mesure peut s'écrire sous une forme linéaire. La frontière efficace fournit au décideur un ensemble de solutions de compromis intéressantes.

Le travail qui vient d'être présenté montre que la combinaison d'un critère de performances et d'un ensemble de critères de robustesse peut avoir de nombreuses applications pratiques. Ceci nous amène, pour terminer cette sous-section, à suggérer une nouvelle approche.

On se place dans le cas où S est fini et l'on suppose que le critère $v(x)$ du modèle de préférence initial exprime un gain. On suppose en outre que $v(x)$ est défini par un jeu de valeurs de référence s_1 jugé particulièrement vraisemblable : $v(x) = v_{s_1}(x)$. $v(x)$ pourrait aussi être défini par la médiane ou la moyenne arithmétique des $v_s(x)$. L'approche proposée ici consiste à modéliser la préoccupation de robustesse à travers deux critères. Le premier est le gain minimum sur tous les jeux de valeurs et le deuxième est défini par le nombre de jeux de valeurs tels que $v_s(x) \geq b$ où b correspond à un objectif que le décideur souhaite atteindre ou, si possible, dépasser avec le maximum de chances. Selon le contexte décisionnel étudié, il est possible de remplacer le deuxième critère par le nombre de jeux de valeurs dans lesquels le regret absolu ou relatif est limité à *b*. La présence de ces deux critères de robustesse à côté du gain escompté avec le jeu de valeurs de référence s_1 peut aider le décideur à prendre conscience du caractère très subjectif de la notion de robustesse. En discutant avec l'analyste de la valeur qu'il doit attribuer à la borne *b*, le décideur peut clarifier le sens qu'il donne à « solution robuste ». L'étude de la frontière efficace, éventuellement paramétrée par *b*, paraît pour ces raisons pouvoir constituer un instrument utile d'aide au choix final. Cette nouvelle approche est différente de celle évoquée au 3.2. En effet, on a conservé dans cette dernière un critère de gain en tant que tel (gain dans un jeu de valeurs de référence ou gain moyen ou médian) ; de plus, on a ajouté un deuxième critère de robustesse : le gain minimum. Faisons encore observer que la suppression du critère de gain conduirait à une approche bi critère relevant du 4.2. L'intérêt de cette nouvelle approche est illustré en annexe.

4.4 Avec un modèle initial de préférence multicritère

On s'intéresse maintenant au type d'approches dans lesquelles le modèle de préférence initial est une famille *F* de $n \geq 2$ critères. Une famille *R* de critères est introduite afin de prendre en compte la préoccupation de robustesse, soit pour être substituée à *F*, soit pour compléter cette famille initiale. Chaque critère de *R* peut se référer soit à un aspect spécifique de la robustesse, soit à un critère du modèle initial de préférence. Dans ce type d'approches, on ne cherche pas, comme dans la section 3.3, à agréger les critères de *R* en un unique critère de synthèse mais plutôt à considérer ces derniers conjointement. Le cas le plus intéressant est celui où la famille *R* est substituée à *F* car le cas où l'ensemble *F* est complété par *R* est difficile à interpréter et peut nécessiter la mise en œuvre d'algorithmes coûteux en termes de ressources informatiques et de temps de calcul.

Dans la pratique, sans doute pour des raisons de simplification, les chercheurs n'utilisent généralement qu'une unique mesure pour modéliser la préoccupation de robustesse. On a toutefois trouvé dans la littérature deux publications relevant du type d'approches abordées dans cette sous-section. Nous les présentons ci-après.

Fernández *et al.* (1999) se sont intéressés au problème « *multicriteria weber location* ». Le problème traité consiste à choisir la localisation d'un super serveur dans une agglomération où *n* serveurs sont déjà installés. Ce super serveur comporte *k* serveurs ayant leurs caractéristiques propres. Au serveur *i* est associé un vecteur à *n* composantes. Chacune de ces composantes p_{ij}, appelée poids, sert à prendre en compte la plus ou moins grande importance que le décideur attache à la distance qui sépare le serveur installé *j* du serveur *i*. Ces poids sont en réalité mal déterminés ; c'est pourquoi un ensemble S_i de vecteurs poids plausibles p_{ij}^s est défini pour $i = 1,...,k$. La préférence du décideur quant au choix de la localisation du serveur *i* au lieu *h* est prise en compte pour chaque $s \in S_i$ par le critère de somme pondérée d_{ih}^s défini ci-après :

$$d_{ih}^s = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^s \left\| x_h - x_j \right\|^2$$

où x_h et x_j désignent respectivement les vecteurs des coordonnées du lieu h ainsi que du serveur j. Les serveurs $i = 1,...,k$ devant être localisés en un même lieu, le choix de ce dernier doit découler d'un compromis entre les composantes de la préférence que traduisent les différentes sommes pondérées d^s_{ih}. Les auteurs commencent par sélectionner comme seules localisations possibles les lieux h pour lesquels les quantités d^s_{ih} ont une valeur acceptable dans tous les jeux de valeurs pour $i = 1,...,k$. Ensuite, pour guider le choix parmi les lieux ainsi sélectionnés, les auteurs font intervenir k critères de robustesse r_{ih}, $i = 1,...,k$ Chacun de ces critères est un critère de regret maximum défini comme suit :

$$r_{ih} = \max_{s \in S_i} \left\{ d^s_{ih} - \min_q d^s_{iq} \right\}.$$

La frontière efficace ou une approximation de cette dernière peut aider le décideur à choisir la meilleure localisation possible.

Besharati et Azarm (2006) ont étudié le problème de « *engineering design optimisation* ». La problématique étudiée dans ce papier est similaire à celle décrite dans la section 3.2 (Chen *et al.*, 1996) mais l'approche utilisée est différente. Le modèle initial de préférence comporte ici n (et non plus un seul) critères f_i dont on cherche à minimiser la valeur, $i = 1,...,n$. Afin de se prémunir contre les effets indésirables liés aux facteurs incontrôlables, les auteurs proposent une démarche basée sur une généralisation des critères de robustesse proposés par Kouvelis et Yu au cas où le modèle initial de préférence est formé par une famille F de critères et au cas où les valeurs de certains coefficients des contraintes sont mal connues. Plus précisément, la connaissance imparfaite des valeurs associées aux points de fragilité est modélisée par un ensemble de jeux de valeurs S dont chaque élément s caractérise une variable possible du critère $f_i, i = 1,...,n$, et la robustesse d'une solution est appréciée à travers deux critères.

Le premier consiste à mesurer, dans le pire jeu de valeurs, une p-distance entre la solution considérée x et un point de référence x^*:

$$\max_{s \in S} \left[\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{f_i^s(x) - f_i(x^*)}{f_i(x^w) - f_i(x^*)} \right|^p \right]^{1/p}$$

où x^w correspond à une solution jugée particulièrement mauvaise dans tous les critères et les jeux de valeurs. Faisons remarquer que cette p-distance fait jouer le même rôle à tous les critères initiaux.

Le deuxième vise à mesurer la variabilité de la performance d'une solution x à travers le calcul de la p-distance entre les points correspondants au meilleur et au pire jeu de valeurs pour la solution x considérée, notés respectivement s et s^w :

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{f^{s^w}{}_i(x)-f_i^{s^b}(x)}{f_i(x^w)-f_i(x^*)}\right|^p\right]^{1/p}$$

Soulignons que, dans cet article, les points de fragilité ne portent pas uniquement sur les coefficients de la fonction objectif mais également sur les coefficients de la matrice des contraintes. C'est pourquoi les auteurs s'intéressent aux solutions efficaces qui restent réalisables dans tous les jeux de valeurs.

Les deux critères de robustesse introduits dans cet article nous semblent intéressants et peuvent s'appliquer dans beaucoup de contextes. En effet, le premier est une généralisation au cas multicritère du critère de regret absolu. Le deuxième peut être vu comme une mesure de la dispersion.

5. Robustesse en aide multicritère à la décision : autres approches

5.1 Préliminaires

Les approches dont il va être question dans cette section diffèrent de celles envisagées précédemment en ce sens qu'elles n'ont pas pour finalité de mettre en évidence des solutions qui présentent un maximum de robustesse eu égard à un ou plusieurs critères préalablement explicités. Ces approches prennent leur place dans le présent chapitre parce qu'elles s'appliquent à des représentations formelles de problèmes d'aide à la décision qui font intervenir un modèle de préférences multicritère initialement défini sans liens avec la robustesse.

La plupart de ces approches font jouer un rôle déterminant au fait qu'une solution, un paquet de solutions, une méthode possèdent ou non certaines propriétés caractérisant la robustesse, propriétés formulées dans des termes autres que maximiser un critère, être sur une frontière efficace. Dans certains cas, ces propriétés font intervenir une ou plusieurs mesures de robustesse auxquelles on associe des seuils qui définissent les conditions dans lesquelles la ou les propriétés sont jugées satisfaites. Ces approches aboutissent le plus souvent à des résultats qui permettent d'énoncer des conclusions ayant trait à la préoccupation de robustesse.

Avant même de présenter certaines de ces rapproches, il faut rappeler ce que Roy (1997, 1998) a proposé d'appeler *conclusions robustes*. Par définition, à tout jeu de valeurs $s \in S$ correspondent une représentation formelle du problème parfaitement défini et une procédure de traitement également parfaitement définie. L'application de cette procédure à cette représentation formelle fournit ce qui a été défini sous le terme général de **résultat** (cf. section 1). Notons $\Re(s)$ ce résultat.

Définition : Une conclusion robuste relative à un sous-ensemble $\hat{S}(S)$ est une assertion qui synthétise l'ensemble des résultats $\left\{\Re(s) / s \in \hat{S}\right\}$.

Voici, à titre d'illustration, quelques formes typiques de conclusions robustes dignes d'intérêt pour l'aide à la décision (dans des contextes où la modélisation des préférences est multicritère ou non).

i) $\forall s \in \hat{S}, x$ est une solution dont l'écart vis-à-vis de l'optimum (ou d'une frontière efficace) n'excède jamais un seuil donné.

ii) Dès l'instant où l'on fait intervenir les jeux de valeurs $s \in \hat{S}$, les objectifs suivants … (par exemple coût garanti, délai garanti) sont inconciliables.

iii) Les résultats suivants … sont validés par les résultats $\Re(s)$ obtenus avec un échantillon $\hat{S}$ de jeux de valeurs ; l'échantillon étant jugé représentatif de *S*, on infère que ces constats restent valides sur tout *S*.

iv) Pour « presque » tous les $s \in S$, x est une solution dont l'écart vis-à-vis de l'optimum (ou d'une frontière efficace) n'excède jamais un seuil donné, « presque » signifiant ici que les exceptions portent sur des jeux de valeurs qui, sans être nécessairement tous bien identifiés, sont jugés négligeables en ce sens qu'ils font intervenir des combinaisons d'options relatives aux points de fragilité qui apparaissent peu vraisemblables.

v) Les résultats $\Re(s)$ obtenus $\forall s \in \hat{S}$ conduisent à mettre en évidence un ensemble $\{x_1,...,x_q\}$ de solutions qui répondent à la préoccupation de robustesse telle qu'elle a été formulée (cette formulation pouvant rester relativement imprécise).

Ces exemples montrent que :

- l'énoncé de conclusions robustes ne conduit pas nécessairement a préconiser la mise à exécution de telle solution plutôt que telle autre (ou encore, cf. 5.4, le choix de telle méthode plutôt que de telle autre) mais, plus simplement, à cadrer, à jalonner, voire à restreindre, le champ de choix du décideur ;
- une conclusion robuste peut être plus ou moins rigoureuse selon que sa validation porte sur un ensemble plus ou moins bien cerné et que sa formulation prête plus ou moins à interprétation (voir Roy, 1997, 1998, la distinction faite entre conclusions parfaitement, approximativement, pseudo robustes).

Nous présentons ci-après un certain nombre d'approches qui trouvent leur place dans cet article soit parce qu'elles sont récentes, soit parce que, bien que anciennes, elles mériteraient d'être repensées en relation avec les considérations qui précèdent afin d'être approfondies ou dégagées du cadre restreint dans lequel elles ont été proposées.

5.2 Robustesse en programmation mathématique

En programmation mathématique, la recherche d'une solution qui résiste à des à peu près ou à des zones d'ignorances afin de se protéger d'impacts jugés regrettables, constitue à la fois, une préoccupation pratique et une source de difficultés théoriques intéressantes. Différents concepts et démarches ont été proposés dans la littérature pour structurer et intégrer cette mauvaise connaissance dans le processus de décision (Ben-Tal et Nemirovski, 1999 ; Berstsimas et Sim, 2003 ; Berstsimas *et al.*, 2004 ; El Ghaoui et Lebret, 1997 ; El Ghaoui *et al.*, 1998 ; Soyster, 1973,1974). Lorsque les coefficients de la fonction objectif ne sont pas connus de façon précises, les critères classiques de la théorie de la décision (critères du pire cas, regret absolu et relatif) ont été souvent utilisés pour appréhender la préoccupation de robustesse en programmation linéaire ainsi qu'en programmation en nombres entiers.

Lorsque la mauvaise connaissance porte sur les coefficients de la matrice des contraintes, les modèles étudiés dans la littérature relèvent principalement, soit de la mauvaise connaissance sur les colonnes, soit sur les lignes. Ces modèles supposent que les colonnes (ou les lignes) de la matrice des contraintes ont des coefficients pouvant varier dans des ensembles bien définis.

Le cas où la mauvaise connaissance porte sur les colonnes de la matrice des contraintes a été initialement étudié par Soyster (1973,1974). Dans ce modèle, chaque colonne $A_i = (a_{ij})$ de la matrice $m \times n$ des contraintes peut prendre des valeurs dans un ensemble $K_j \subset R^m$. Les coefficients de la fonction objectif ainsi que les seconds membres sont supposés connues de manière précise. L'auteur qualifie de robuste toute solution dès lors qu'elle est réalisable pour toutes les valeurs possibles des vecteurs A_j choisies dans K_j. La recherche d'une solution robuste se ramène par conséquent à la résolution d'un nouveau programme mathématique de même nature avec une matrice des contraintes $A' = (a'_{ij})$ définie de la manière suivante :

- $a'_{ij} = \max_{a_j \in K_j} a_{ij}$ dans le cas où la contrainte est de type ≤.,
- $a'_{ij} = \min_{a_j \in K_j} a_{ij}$ dans le cas où la contrainte est de type ≥..

Le modèle de Soyster est très conservateur. Le nouveau programme mathématique n'admet pas toujours des solutions réalisables bien qu'il puisse exister des solutions robustes au sens qui vient d'être défini. En effet, si pour certains j le vecteur (a'_{ij}), pour $i = 1,...,n$, qui vient d'être défini n'appartient pas à K_j, l'ensemble des solutions réalisables du nouveau programme linéaire ne contient pas nécessairement toutes les solutions robustes. En outre, lorsqu'il existe des solutions réalisables, celle qui optimise la fonction objectif peut avoir une mauvaise valeur et ne pas être optimale dans l'ensemble des solutions robustes.

Berstsimas et Sim (2003) ont présenté une approche qui permet de contrôler le degré de conservatisme de la recommandation du modèle lorsque la mauvaise connaissance porte sur les lignes de la matrice des contraintes. Plus précisément, chaque coefficient de la matrice des contraintes peut prendre n'importe quelle valeur dans l'intervalle $\left[a_{ij} - \alpha_{ij}, a_{ij} + \alpha_{ij}\right]$ et, pour chaque ligne *i*, un nombre $\Gamma_i > 0$ est considéré (Γ_i ne peut excéder le nombre *n* de variables). Le modèle repose sur l'hypothèse qu'il est peu probable que tous les paramètres du modèle atteignent en même temps leurs valeurs les plus défavorables. Une solution est qualifiée Γ-robuste si cette dernière respecte la contrainte *i*, $\forall i = 1,...,m$, lorsqu'au plus Γ_i coefficients sont susceptibles d'atteindre la borne supérieure $a_{ij} + \alpha_{ij}$ de l'intervalle dans le cas d'une contrainte de type ≤ (la borne inférieure $a_{ij} - \alpha_{ij}$ de l'intervalle dans le cas d'une contrainte de type ≥) et les valeurs des autres coefficients sont fixées à la valeur moyenne de l'intervalle. Bertsimas et Sim ont montré que cette approche donne lieu, à l'inverse des versions min-max regret absolu ou relatif, à une version robuste ayant la même complexité que le problème de départ. En particulier, les versions robustes des problèmes de plus court chemin, d'arbre couvrant et d'affectation sont résolubles en temps polynomiales. En outre, la version robuste d'un problème *NP*-difficile qui est *β*-approximable est également *β*-approximable. Toutefois, cette approche admet aussi quelques limites. En effet, elle donne lieu a un programme paramétré par les quantités Γ_i et il n'est pas facile de spécifier a priori les valeurs appropriées de ces dernières. En l'absence de toute information éclairant le choix de ces valeurs, le modèle obtenu se ramène au modèle conservateur de Soyster en fixant $\Gamma_i = n, \forall i = 1,...,m$.

Lorsque la mauvaise connaissance portant sur tous les coefficients d'un programme mathématique est prise en compte à l'aide d'intervalles, Chinneck et Ramadan (2000) se sont intéressé à la meilleure et la pire solution optimale en vue d'obtenir un encadrement des valeurs des solutions optimales associées aux différents jeux de valeurs. Gabrel *et al.* (2007) ont étudié la complexité théorique des problèmes de meilleur optimum et de pire optimum lorsque les seconds membres des contraintes peuvent prendre des valeurs dans des intervalles. En outre, les auteurs ont montré que le problème du pire optimum pour un programme linéaire de type minimisation et où les seconds membres sont définis à l'aide d'intervalles est équivalent au problème du meilleur optimum pour le programme dual avec des coefficients dans la fonction objectif définis à l'aide d'intervalles.

Dans les travaux qui viennent d'être évoqués, la préoccupation de robustesse ne fait pas intervenir de critères appréhendant la plus ou moins grande robustesse d'une solution. Elle conduit à considérer comme robuste toute solution réalisable dans les conditions qui ont été défini.

Pour achever cette section, nous allons suggérer une approche différente. Considérons le programme linéaire suivant :

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$s.c.$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_j, \quad i = 1,..., n$$
$$x_j \geq 0$$

Supposons que seuls les coefficients de la fonction objectif soient connues de manière précise et par hypothèse toutes les lignes de la matrice des contraintes se rapportent à des quantités exprimées dans la même unité (physique, monétaire, …). Les valeurs des coefficients de la matrice des contraintes sont incertaines. Un ensemble fini *S* de jeux de valeurs permet de modéliser cette mauvaise connaissance. Dans le cas général, il n'est pas exclu que l'intersection des domaines réalisables de tous les jeux de valeurs soit vide. En outre, même si cette intersection est non vide, le prix de la robustesse au sens de Soyster peut être fort. Le décideur peut tolérer que la solution robuste soit non réalisable dans seulement un sous-ensemble de *S* mais à condition d'avoir un coût relativement faible. En effet, le non respect de l'égalité est souvent acceptable en pratique : il importe, toutefois, que les écarts non nuls entre membres de droite et membres de gauche reste « faibles » et peux nombreux. Il s'ensuit qu'une solution mathématiquement non réalisable peu être préférée à une solution beaucoup plus coûteuse qui satisfait exactement à toutes les égalités. Etant donnée une solution *x*, les écarts à prendre en compte sont définis comme suit :

$$e_i^s = b_i^s - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^s x_j$$

Une solution peut être jugée d'autant plus robuste que ces écarts restent faibles dans le plus grand nombre possible de jeux de valeurs. Dans cet esprit, on propose d'adjoindre au critère de coût l'un des trois critères de robustesse définis ci-après :

- $\frac{1}{|S|}\sum_{s\in S}\max_{i=1,...,m}\left|e_i^s\right|$
- $\frac{1}{m|S|}\sum_{s\in S}\sum_{i=1}^{m}\left|e_i^s\right|$
- $\frac{1}{m|S|}\sum_{s\in S}\sum_{i=1}^{m}\left|e_i^s\right|^2$

Dans certains cas, il pourra être pertinent d'introduire dans ces critères des poids servant à différencier l'importance attachée aux différents écarts selon qu'ils sont positifs ou négatifs ou selon qu'ils concernent telle ligne *i* plutôt que telle autre.

Cette approche conduit par conséquent à chercher des solutions offrant un compromis entre d'une part la valeur de la fonction objectif et d'autre part les écarts traduisant l'imparfaite satisfaction des contraintes. Soulignons que la frontière peut être construite avec la méthode simplexe en optimisant une combinaison linéaire des deux critères retenus sauf si le critère de robustesse retenu est le troisième. Ceci est en effet possible car il n'existe pas ici de solutions non supportées.

5.3 Obtention de conclusions robustes à partir d'un sous-ensemble représentatif de S

Au début des années 1980, dans le cadre de deux études portant, la première, sur les priorités de réalisation de prolongements de lignes de métro en région parisienne (cf. Roy et Hugonnard, 1982), l'autre sur le choix de celui de constructeurs qui aurait à assurer l'automatisation des centres de tri de la poste française (cf. Roy et Bouyssou, 1993, chapitre 8), B. Roy a conçu et mis en œuvre une approche qui (bien que peu formalisée) lui a permis d'obtenir une série de conclusions répondant à la préoccupation de robustesse. Ces deux cas concrets étaient multicritères. La présence de points de fragilité (non désignés sous ce terme) provenait d'une part de l'existence de diverses données dont la valeur était mal déterminée dans un certain intervalle et, d'autre part, du choix de la méthode qui conduisait, pour des raisons techniques, à appliquer plusieurs procédures de traitement. Dans les deux cas, les conclusions robustes obtenues se sont avérées très intéressantes. Cette approche mérite, nous semble-t-il, d'être généralisée et approfondie dans le cadre formel décrit ci-après.

Au préalable, nous devons préciser que ce type d'approche ne concerne que le cas où on est en présence d'un ensemble fini *A* de possibilités que nous appellerons ici *actions* plutôt que *solutions*. Les résultats $\Re(s)$ qu'il s'agit d'exploiter peuvent être ceux obtenus par application (Roy, 1996, chapitre 6) :

- soit d'une procédure de sélection (problématique du choix) ;
- soit d'une procédure d'affectation (problématique du tri) ;
- soit d'une procédure de classement (problématique du rangement).

Nous proposons d'organiser ce type d'approche en trois étapes.

Etape 1 : Passage de *S* à $\widehat{S}$ (cf. 5.1)

Ici, *S* désigne toujours l'ensemble des jeux de valeurs qui découlent d'une part des versions éventuellement retenues dans le cadre de la formulation du problème et, d'autre part, des diverses procédures de traitement qui sont éventuellement envisagées. $\widehat{S}$ désigne un sous-ensemble fini de *S* répondant aux deux exigences suivantes :

Exigence de calculabilité : $\Re(s)$ doit pouvoir être obtenu $\forall s \in \widehat{S}$.

Exigence de représentativité : L'étude de $\left[\Re(s) / s \in \widehat{S}\right]$ doit permettre d'énoncer des conclusions qui, avec un risque d'erreur jugé négligeable, pourront être considérées comme valides sur *S* tout entier.

Ces deux exigences étant généralement conflictuelles, l'élaboration de $\widehat{S}$ nécessite de trouver un compromis. Pour répondre à l'exigence de représentativité (qui restera dans bien des cas très subjective), on peut emprunter soit une voie combinatoire, soit une voie probabiliste, éventuellement combiner les deux.

La voie combinatoire consiste à retenir, pour chaque point de fragilité f un ensemble très restreint e_f d'options possibles (deux ou trois par exemple). $\widehat{S}$ est ensuite défini comme le produit cartésien de ces ensembles e_f ou seulement comme une partie de ce produit cartésien en éliminant les combinaisons qui paraissent le moins vraisemblables, cela afin de respecter l'exigence de calculabilité.

La voie probabiliste consiste à choisir une procédure de tirage aléatoire défini sur S et à l'appliquer de façon répétée pour tirer un nombre de jeux de valeurs compatible avec l'exigence de calculabilité. Si S est le produit cartésien d'un certain nombre d'intervalles, le tirage peut, par exemple, être effectué de façon indépendante sur chacun de ces intervalles selon une loi uniforme (pour plus détails sur ce type de procédures et notamment sur leur caractère représentatif, voir par exemple Steuer, 1986).

Etape 2 : Passage de $\widehat{S}$ à $\widehat{S}'$

Après avoir calculé $\Re(s)$, $\forall s \in \widehat{S}$, on peut procéder à un premier examen de ces résultats ayant pour objet de mettre en évidence deux catégories de points de fragilité.

Catégorie 1 : Les points qui peuvent avoir une influence très significative sur le résultat : Ce sont ceux qui conduisent à un résultat $\Re(s)$ très fortement influencé par l'option (relative aux points en question) présente dans s lorsque l'on examine un sous-ensemble de $\widehat{S}$ dont les composantes sur tous les points de fragilité autres que celui en question sont sinon identiques, du moins très voisines.

Catégorie 2 : Les points dont l'influence sur les résultats peut être jugée négligeable : Ce sont ceux qui conduisent à un résultats $\Re(s)$ très peu influencé par l'option (relative aux points en question) présente dans s lorsque l'on examine un sous-ensemble de $\widehat{S}$ dont les composantes sur tous les points de fragilité autres que celui en question sont sinon identiques, du moins très voisines.

Pour procéder à un tel examen, on peut, dans certains cas, utiliser des outils classiques de l'analyse des données. La présence dans $\widehat{S}$ de jeux de valeurs s^* de référence (particulièrement chargés de sens pour le décideur) peut également s'avérer très utile. C'est particulièrement le cas si on a en outre introduit, dans $\widehat{S}$, tout ou partie des jeux de valeurs qui ne diffèrent de s^* que par une seule de leurs composantes.

L'examen dont il vient d'être question a pour objet de substituer, à $\widehat{S}$, un ensemble $\widehat{S}'$ au moins aussi représentatif et, autant que faire se peut, plus restreint. On peut en effet ne conserver qu'une seule option (éventuellement deux) relative aux points de fragilité de catégorie 2. Ceci autorise le retrait de $\widehat{S}$ d'un certain nombre de jeux de valeurs. Les points de fragilité de catégorie 1 peuvent toutefois justifier l'ajout de certains jeux de valeurs pour mieux mettre en évidence l'influence de ces points.

Etape 3 : Obtention de conclusions robustes

Une analyse attentive (éventuellement assistée d'une procédure systématique) de $\left[\Re(s)/s \in \widehat{S}'\right]$ doit permettre de découvrir des conclusions robustes pertinentes pour le problème traité. Voici quelques exemples types de celles que l'on peut chercher à valider selon la nature de la procédure qui détermine $\Re(s)$ (ces exemples sont inspirées de celles obtenues dans les deux cas concrets évoqués au début de la présente sous-section).

Cas d'une procédure de sélection

- l'action $a_1 \in \Re(s), \forall s \in \widehat{S}'$;
- l'action $a_2 \notin \Re(s), \forall s \in \widehat{S}'$;
- selon que l'option relative aux points de fragilité *f* vaut … ou …, l'action a_3 appartient ou n'appartient pas à $\Re(s)$;
- les actions a_4 et a_5 sont toujours associées en ce sens que $\Re(s)$ soit les contient toutes les deux, soit n'en contient aucune.

Cas d'une procédure d'affectation

- $\forall s \in S, c_k$ est la pire catégorie à laquelle a_1 peut être affectée et dès l'instant où, sur le point de fragilité *f*, l'option est au moins égale à …, alors la pire catégorie n'est pas c_k mais c_h ;
- l'action a_2 est toujours affectée dans une catégorie supérieur à celle à laquelle est affectée l'action $a_3, \forall s \in \widehat{S}'$ et, dès l'instant où, sur le point de fragilité *f*, l'option est au moins égale à …, deux catégories au moins séparent leurs affectations.

Cas d'une procédure de classement

- aucune des actions de $B \subset A$ n'est classée parmi les dix premières de $\Re(s), \forall s \in \widehat{S}'$;
- les actions de $C \subset A$ sont les seules à toujours être présentes parmi les douze premières de $\Re(s), \forall s \in \widehat{S}'$.

Dans bien des cas, les conclusions qui pourront être validées ne pourront être formulées de façon aussi rigoureuse (conclusions parfaitement robustes) : des exceptions devront être tolérée. Celles-ci ne pourront peut-être pas être clairement circonscrites. Si elles proviennent de jeux de valeurs combinant les options extrêmes de plusieurs points de fragilité, elles pourront être jugées négligeables car peu vraisemblables (conclusions approximativement ou pseudo robustes). Prenons comme point de départ une assertion du type de celles proposées ci-dessus. Il devrait être possible de concevoir une procédure capable de trouver sous quelles conditions et relativement à quelles actions ce type d'assertions peut être validé.

5.4 Approches pour apprécier la robustesse d'une méthode

Comme on l'a mentionné en introduction, on entend ici par méthode une famille $\wp$ de procédures qui se différencient par les options prises relativement à certains points de fragilité de la méthode. Il s'agit par exemple :

- des niveaux de concordance ou seuils de coupe dans les méthodes ELECTRE ;
- des seuils servant à rendre strictes certaines inégalités dans les méthodes MACBETH ou UTA ;
- des paramètres multiples intervenant dans les méthodes tabou, recuit simulé ou génétique.

A côté de ces points de fragilité que l'on peut qualifier de techniques, beaucoup de méthodes multicritères font intervenir des paramètres qui sont censés traduire un aspect de la réalité sans pour autant que ceci renvoie à l'existence d'une vraie valeur qu'ils seraient censés avoir dans cette réalité. C'est notamment le cas des taux de substitution, des poids intrinsèques, des seuils d'indifférence, de préférence, de veto, la forme analytique d'une distribution de probabilités ou celles définissant un nombre flou… Ce sont là des points de fragilité qui, selon le cas, peuvent être imputés à la méthode (liés dans ce cas à la procédure) ou au modèle (liés dans ce cas à la version du problème).

Une fois définis les points de fragilité d'une méthode, une procédure P_s est caractérisée par un jeu de valeurs s qui décrit l'option retenue pour chacun de ces points de fragilité. Lorsque l'on envisage d'utiliser une méthode, que ce soit pour être mise en place en vue d'une application répétitive ou simplement pour éclairer une décision unique, on peut être amené à regarder tous les jeux de valeurs d'un certain ensemble S (qui peut laisser de côté certaines procédures de $\wp$ jugées non pertinentes) comme aussi légitimes les uns que les autres. Se préoccuper de la robustesse de la méthode, c'est vouloir se protéger de cette part d'arbitraire qui s'attache au choix de tel élément de S plutôt que de tel autre. Vincke (1999a) a proposé de prendre appui sur la plus ou moins grande similarité des résultats obtenus avec les différentes procédures $P_s, s \in S$, pour juger de la robustesse d'une méthode.

Cette approche de la robustesse d'une méthode multicritère d'aide à la décision nécessite de préciser ce que similaire signifie. Vincke propose d'apprécier cette similarité par une mesure de distance portant sur les paires de résultats. Cette distance dépend bien évidemment de la nature des résultats auxquels la méthode multicritère conduit (fonctions d'utilité, sélection d'actions, préordres complets ou partiels, affectation à des catégories). Le critère servant à juger de la robustesse d'une méthode pourra alors être défini par la valeur maximum que prend cette distance sur l'ensemble des paires de jeux de valeurs appartenant à S lorsque la méthode est appliquée à une version précise d'un problème. Sur ces bases, une méthode pourra être qualifiée de robuste si ce maximum reste inférieur à un seuil fixé pour la famille de versions retenue pour le problème étudié. Comme le souligne Vincke, cette définition de la robustesse d'une méthode ne doit pas être utilisée pour juge si une méthode est « bonne » ou « mauvaise ». En effet, une méthode qui conduirait systématiquement à un même résultat jugé « mauvais » serait néanmoins robuste.

Ces considérations montrent qu'il n'est pas simple à donner sens à cette notion de robustesse d'une méthode multicritère. Cette notion ne peut avoir un caractère absolu. Elle est contingente d'une part à la famille de versions du problème étudié et, d'autre part, à la façon dont a été défini l'ensemble *S*. Dans l'approche proposée par Vincke, elle dépend en outre de la mesure de distance choisie. Quoi qu'il en soit, ce sujet pourrait être porteur de travaux théoriques intéressants. Peut-être ne faut-il pas attendre de ces recherches qu'elles aident le chercheur confronté à un problème réel à choisir la méthode la plus robuste pour traiter ce problème. En effet, pour un problème donné, la façon dont est définie la famille de versions est le plus souvent influencée par la méthode. En outre, l'ensemble *S* est propre à chaque méthode. On voit mal dans ces conditions sur quelles bases affirmer qu'une méthode est plus robuste qu'une autre. Le praticien peut néanmoins attendre des recherches conduites à propos de la robustesse des méthodes qu'elles le guide :

- lorsqu'il doit éclairer une décision unique à mieux prendre en compte l'ensemble des points de fragilité de la méthode choisie, notamment dans la formulation de conclusions robustes ;
- lorsqu'il doit implanter une méthode en vue d'une application répétitive (dans le temps ou dans l'espace) à décider de l'option à retenir pour chacun des points de fragilité qu'il a choisi.

Le lecteur trouvera dans Roy *et al.* (1983, 1986) la description d'un cas où la façon d'arrêter les valeurs à attribuer à un certain nombre de paramètres pour une application répétitive de la méthode ELECTRE III a reposé sur une comparaison de la plus ou moins grande similarité des têtes de classement. La méthode avait pour but d'aider un décideur à sélectionner périodiquement, parmi plusieurs centaines de stations de métro, un petit groupe de stations (huit au maximum) dont la rénovation devait être programmée en priorité. Par « tête de classement », il faut entendre ici la liste des k stations les mieux rangées par la méthode. La comparaison de ces têtes de classement a permis dans un premier temps (en posant k=20) de mettre en évidence le fait que, pour la majeure partie des points de fragilité, le choix de l'option retenue n'avait que pas ou peu d'influence (tête de classement fortement similaire au sens de la différence symétrique). Ceci a permis, dans un second temps, d'étudier plus finement l'impact des options à retenir pour les points de fragilité restants et de prendre en compte des informations additionnelles pour arrêter les choix finaux.

5.5 Approches permettant d'expliciter des conclusions robustes dans le cadre de fonctions d'utilité additives

J. Figueira, S. Greco, V. Mousseau, R. Slowinski ont proposé diverses procédures d'agrégation multicritère, fondées sur le principe de régression ordinale, qui permettent de valider certains énoncés de conclusions robustes reposant sur les concepts de possible et de nécessaire. Ce sur quoi portent ces conclusions varie avec la procédure d'agrégation proposée :

– dans UTADIS (Greco *et al.*, 2007a), il s'agit de la catégorie à laquelle une action *a* peut être affectée parmi un ensemble de catégories totalement ordonnées ;
– dans UTA^{GMS} (Greco *et al.*, 2008), il s'agit des assertions de type « l'action *a* surclasse l'action *b* » ;
– dans GRIP (Figueira, Greco et Slowinski, 2008), il s'agit de l'intensité avec laquelle une action *a* surclasse une action *b* ;
– dans GRIP-MOO (Figueira, Greco, Mousseau et Slowinski, 2008), il s'agit des meilleures actions qui ne sont surclassées par aucune autre action réalisable à une étape particulière d'une procédure interactive de l'optimisation multiobjectif.

Ces quatre procédures ont été conçues pour aider un décideur ou des décideurs multiples (cf. les extensions présentées dans Greco *et al.*, 2007b) dans les conditions suivantes :
Le décideur s'intéresse à un ensemble *A* d'actions évaluées sur *n* critères. Pour certaines actions dites de référence, il peut fournir des informations de type préférentiel. Celles-ci diffèrent selon la procédure considérée. Elles portent essentiellement sur la façon dont il range de la meilleure à la moins bonne ces actions de référence ou sur la façon dont certaines se comparent à d'autres ou encore (dans GRIP) sur l'intensité de préférences avec laquelle une action *a* est préférée à une action *b* aussi bien sur certains critères considérés séparément que globalement sur l'ensemble des critères. Soit *I* l'ensemble des informations fournies. L'agrégation envisagée est de type additif dans la continuité des procédures UTA (Siskos *et al.*, 2005), toutefois avec différentes améliorations concernant notamment la forme des fonctions d'utilité marginales qui n'est plus linéaire par morceaux mais simplement non décroissante. Cela signifie que les auteurs cherchent à rendre compte des informations *I* avec des fonctions d'utilité dites de synthèse, chacune pouvant être vue comme une somme pondérée de *n* fonctions d'utilité marginales associées aux différents critères. Un algorithme d'ajustement leur fournit un moyen pour cerner un ensemble *U*(*I*) de fonctions d'utilité de synthèse dites « compatibles avec *I* ». L'ensemble *U* est défini par une famille de contraintes linéaires : à chaque point intérieur du polyèdre *S* délimité par ces contraintes est associée une fonction d'utilité compatible. Ici, tout point $s \in S$ constitue l'un des jeux de valeurs pris en compte. Il n'est pas impossible que *S* soit vide. Cela signifie que le modèle d'utilité additif considéré est inapte à rendre compte des préférences du décideur telles qu'il les a exprimées au travers de l'ensemble *I*.

Dans tous les cas, chacune des procédures d'agrégation évoquées ci-dessus conduit à présenter au décideur des conclusions en termes de nécessaire ou de possible (cf. Greco *et al.*, 2007b). Une conclusion est dite nécessaire si elle est validée par toutes les fonctions de *U*(*I*). Elle est dite possible si elle validée pour l'une au moins d'entre elles. Toute conclusion nécessaire est donc possible. Le modèle d'utilité additif considéré, excluant toute situation d'incomparabilité, conduit à regarder comme possible toute conclusion du type envisagé ci-dessus qui n'apparaît pas comme nécessaire. Il peut être intéressant, après avoir montré les résultats obtenus au décideur, de lui demander s'il peut enrichir *I* soit en apportant des informations complémentaires sur le même ensemble de référence, soit en ajoutant d'autres actions de référence. Cet enrichissement de *I* conduit à de nouvelles conclusions qui apportent de nouvelles réponses à la préoccupation de robustesse du décideur. Faisons observer que cet enrichissement conduit à restreindre S (qui peut éventuellement devenir vide).

Ce type d'approches, fondé sur le possible et le nécessaire, peut être exploité dans d'autres contextes. Considérons un ensemble (non nécessairement fini) de solutions évaluées sur n critères $v_1,...,v_n$. Soit S un ensemble (fini) de jeux de valeurs qui conduit à définir, $\forall s \in S$, une performance $v_{is}(x)$ pour chaque solution x, i=1,…,n. On peut qualifier de *nécessairement efficace* toute solution efficace et comme *possiblement efficace* toute solution efficace pour au moins un $s \in S$. On peut penser que, dans bien des cas, l'ensemble des solutions nécessairement efficaces sera vide et que celui des solutions possiblement efficaces sera pléthorique. On pourra alors être conduit à s'intéresser à la plus grande valeur de λ pour laquelle il existe des solutions qui sont efficaces pour au moins λ jeux de valeurs $s \in S$. De telles solutions peuvent, en un certain sens, être qualifiées de robustes.
D'autres façons d'exploiter l'approche fondée sur le possible et le nécessaire ont été présentées dans Greco, Mousseau et Slowinski. (2007b). Elles portent notamment sur certains modèles unicritères classiques en RO-AD (arbre couvrant minimal) et sur les modèles multicritères de surclassement.

5.6 Approches de la robustesse prenant appui sur le concept d'ordres prudents

Le concept d'ordres prudents a été introduit par Arrow et Raynaud (1986). On va tout d'abord rappeler ce qu'est un ordre prudent. On montrera ensuite le parti qui peut en être tiré pour répondre à la préoccupation de robustesse. On prendra pour cela appui sur les travaux de Lamboray (2007).

Soit $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ un ensemble d'actions et F une famille de q individus (il peut aussi s'agir de critères). L'individu i ($i = 1,...,q$) range les actions de A en fonction de ses préférences selon un ordre complet O_i.

Le concept d'ordre prudent a pour objet de mettre en évidence des rangements définis sur A qui minimisent les oppositions dans un sens qui sera précisé plus loin.

Soit S la relation qui prend en compte le nombre des ordres O_i dans lesquels a_i est préférée à a_j : $S_{ij} = \left|\{k \in \{1,...,q\} : ((a_i, a_j) \in O_k\}\right|$. Soit $R \geq \lambda$ et $R > \lambda$ les relations définies en opérant comme suit des coupes de S : $R_{>\lambda} = \{(a_i, a_j) : S_{ij} > \lambda\}$ et $R_{\geq\lambda} = \{(a_i, a_j) : S_{ij} \geq \lambda\}$ Il est clair que, lorsque λ croît, la relation $R_{\geq\lambda}$ s'appauvrit. Avec $\lambda = 1$, cette relation contient les q ordres complets O_i. Il existe donc une valeur maximum de λ, valeur notée α, telle que $R_{\geq\alpha}$ contient un ordre complet ($R_{\geq(\alpha+1)}$ ne contient par conséquent aucun ordre complet).

La relation $R_{>q}$ est vide. Elle ne contient par conséquent aucun circuit. Il existe donc une plus petite valeur de λ, valeur notée β, telle que $R_{>\beta}$ est sans circuit ($R_{>(\beta-1)}$

contient par conséquent au moins un circuit). Lorsqu'il y a unanimité ($O_1 = O_2 = ... = O_q$), $\beta = 0$ et $\alpha = q$.

Par définition, un ordre prudent $\boldsymbol{O}$ est un ordre complet qui vérifie $R_{>\beta} \subseteq \boldsymbol{O} R \geq \alpha$. Dans le cas d'unanimité, l'ordre commun est un ordre prudent.

Avant d'interpréter ce concept, nous allons citer quelques résultats.

Arrow et Raynaud ont démontré que $\alpha + \beta = q$. Il est facile de vérifier qu'il existe un ordre prudent unique dans le cas $\alpha \geq \beta$. Dans le cas contraire, on a nécessairement $\alpha < \frac{q}{2} < \beta$. Il peut alors exister plusieurs ordres prudents (ce nombre pouvant être très élevé lorsque *n* est grand). Dans ce cas général, Arrow et Raynaud justifient comme suit que ces ordres soient qualifiés de **prudents** (une justification analogue vaut pour l'unique ordre prudent dans le cas $\alpha \geq \beta$).

En premier lieu, tout couple $(a_i, a_j) \in R_{>\beta}$ figure, par définition, dans tous les ordres prudents. Ces couples ne créent entre eux aucun circuit, par conséquent aucune contradiction. Pour Arrow et Raynaud, un ordre prudent doit servir à mettre en évidence des éléments de consensus. Dans cette optique, ne pas conserver un couple $(a_i, a_j) \in R_{>\beta}$ conduirait à retenir le couple opposé (a_j, a_i), lequel suscite une forte opposition alors que le couple (a_i, a_j) est soutenu par une majorité au moins égale à $\beta > \frac{q}{2}$. Considérons en second lieu un rangement qui contient un couple $(a_i, a_j) \notin R_{\geq\alpha}$. Le nombre des individus qui soutiennent un tel couple est $< \alpha$. Les couples présents dans un ordre prudent sont tous soutenus par au moins α individus. L'élimination des couples ne figurant pas dans $R_{\geq\alpha}$ conduit à ne qualifier de prudents que des ordres qui minimisent la plus forte opposition (laquelle est égale à $q - \alpha$ dans tous les ordres prudents).

Dans le cas exceptionnel où il n'existe qu'un ordre prudent, celui-ci peut être regardé comme un rangement robuste. Dans le cas contraire, Lamboray (2007) propose l'élaboration de conclusions robustes prenant appui sur la multiplicité des ordres prudents.

Une première forme de conclusions robustes peut être obtenue en construisant des assertions qui soient valides sur la totalité des ordres prudents. On peut dans cette optique s'intéresser aux couples (a_i, a_j) qui sont présents dans tous les ordres prudents. On peut aussi s'intéresser au meilleur et au pire rangs qu'occupe l'action a_i dans l'ensemble des ordres prudents. Lamboray a montré comment ces rangs extrêmes pouvaient être calculés.

Une autre forme de conclusion robuste peut être obtenue en ne s'intéressant qu'à ceux des ordres prudents qui possèdent une propriété donnée : par exemple contenir un ou plusieurs couples (a_i, a_j) ou encore placer l'action a_i à un rang au moins égal (ou au plus égal) à un rang imposé. Ceci conduit à l'énoncé de conclusions robustes conditionnelles. Celles-ci peuvent notamment faciliter une démarche de concertation ayant pour but d'aboutir à un rangement de consensus.

Faisons observer que la multiplicité des ordres prudents peut être vue comme une conséquence des difficultés (autrement dit de la part d'arbitraire) que l'on rencontre lorsque l'on cherche à agréger des informations de nature purement ordinale. Soulignons pour conclure que le concept d'ordre prudent a été défini à partir d'une famille d'ordres complets. Il serait intéressant de chercher à généraliser ce concept au cas de préordres et même de quasi-ordres. Les ordres complets garantissent $s_{ij} + s_{ji} = 1$. Sauf modification de la définition de s_{ij}, cette égalité n'est plus vérifiée lorsqu'il existe des ex æquo. Le fait que cette égalité soit vérifiée joue malheureusement un rôle important dans la définition et l'interprétation des ordres prudents.

6. Conclusion

En aide multicritère à la décision (AMCD), la préoccupation de robustesse est à l'origine de travaux qui présentent un grand intérêt tant sur le plan théorique que sur le plan pratique. Le terme "robuste" a été utilise en tant que qualificatif se rapportant à **une aptitude à résister à des « à peu près » ou à des « zones d'ignorances » afin de se protéger d'impacts jugés regrettables, notamment dégradation de propriétés à préserver**.

Les deux premières sections ont eu pour objet de faire un certain nombre de rappels et d'introduire quelques définitions afin de bien circonscrire le cadre dans le quel les développements récents ont été passés en revue dans cet article. La section 3 a été consacrée à un premier type d'approches où la robustesse est prise en compte par un unique critère qui vient compléter un modèle de préférence préalablement défini indépendamment de la préoccupation de robustesse. On a tout d'abord caractérisé ce type approches dans une première sous-section (3.1) ; il a été a divisé en deux sous-types (3.2 et 3.3). On a présenté plusieurs articles relevant de chacun de ces sous-types. Dans une dernière sous-section (3.4), on a proposé une nouvelle approche. En section 4, on s'est intéressés à la façon dont la préoccupation de robustesse pouvait être prise en compte à l'aide de plusieurs critères. Après avoir caractérisé ce deuxième type d'approches, on a structuré celui-ci en trois sous-types (4.2, 4.3 et 4.4). Ce type d'approches n'a donné lieu, à notre connaissance, qu'à très peu de publications. Après les avoir présentés, on a également proposé de nouvelles approches ; l'une d'elles est illustrée en annexe. Dans une dernière section avant la conclusion, on a présenté des approches permettant d'appréhender la robustesse autrement qu'en explicitant un ou plusieurs critères devant servir à comparer les solutions. Après quelques préliminaires (5.1), on a exposé (5.2) une nouvelle approche de robustesse en programmation mathématique. La sous-section 5.3 a été consacrée à la présentation d'une procédure permettant d'obtenir des conclusions robustes à partir d'un sous-ensemble représentatif de l'ensemble *S* des jeux de valeurs. La sous-section suivante a été consacrée au problème que pose l'appréhension de la robustesse d'une méthode. Dans la sous-section 5.5, on a présenté des travaux ayant pour objet d'expliciter des conclusions robustes en relation avec des fonctions d'utilité additives.

Dans la dernière sous-section, on s'est intéressés à des approches de la robustesse prenant appui sur le concept d'ordres prudents.

Les considérations développées dans cet article montrent que vouloir prendre en compte plusieurs critères pour appréhender la robustesse en aide à la décision est un champ de recherche qui reste porteur de développements nouveaux, aussi bien sur les plans théoriques qu'appliqués. Des développements futurs devraient contribuer à une plus large utilisation des outils de la recherche opérationnelle.

Bibliographie

Arrow K., Raynaud H. (1986): *Social choice and multicriterion decision-making*, MIT Press.

Ben-Tal A., Nemirovski A. (1998): "Robust convex optimization", *Mathematics of Operations Research*, Vol. 23, n° 4, 769-805.

Ben-Tal A., Nemirovski A. (1999): "Robust solutions of uncertain linear programs", *Operations Research Letters*, Vol. 25, n° 1, 1-13.

Berstsimas D., Pachamanova D., Sim M. (2004): "Robust linear optimization under general norms", *Operations Research Letters*, Vol. 32, n° 6, 510-516.

Berstsimas D., Sim M. (2003): "Robust discrete optimization and network flows", *Mathematical Programming Series B*, Vol. 98, 49-71.

Besharati B., Azarm S. (2006): "Worst case deterministic feasibility and multiobjective robustness measures for engineering design optimisation", *International Journal of Reliability and Safety*, Vol. 1, 40-58.

Billaut J.C., Moukrim A., Sanlaville E. (sous la direction de) (2005) : *Flexibilité et robustesse en ordonnancement*, Paris, Lavoisier.

Bulletin (2002-2007) du groupe de travail européen « Aide Multicritère à la Décision » n° 6 à 15 (voir : http://www.inescc.pt/~ewgmcda/Articles.html).

Chen W., Allen J., Tsui K. L., Mistree F. (1996): "A procedure for robust design: Minimizing variations caused by noise factors and control factors", *Journal of Mechanical Design*, Vol. 118, n° 4, 478-493.

Chinneck J.W., Ramadan K. (2000) : "Linear programming with interval coefficients", The Journal of the Operational Research Society, 51(2):209-220.

Ehrgott M., Ryan D.M. (2002). "Constructing robust crew schedules with bicriteria optimization", *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, Vol. 11, n° 3, 139-150.

El Ghaoui L., Lebret H. (1997): "Robust solutions to least-squares problems with uncertainty data", *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, Vo. 18, n° 4, 1035-1064.

El Ghaoui L., Oustry F., Lebret H. (1998): "Robust solutions to uncertain semidefinite programs", *SIAM Journal of Optimization*, Vol. 9, n° 1, 33-52.

Fernández F., Nickel S., Puerto J., Rodriguez-Chia A.M. (1999): "Robustness in the Pareto-solutions for the multicriteria weber location problem", Technical report n° 50/1999, University of Kaiserslautern.

Figueira J., Greco S., Mousseau V., Slowinski M. (2008): "Interactive multiobjective optimization using a set of additive value functions", Chapter 4 in: J. Branke, K. Deb,

Gabrel V., Murat C., Remli N. (2007): "Linear Programming with interval right hand-sides", Rapport LAMSADE 255.

K. Miettinen, R. Slowinski (eds.), *Multiobjective Optimization: Interactive and Evolutionary Approaches*. Springer-Verlag, Berlin.

Figueira J., Greco S., Slowinski R. (2008): "Building a set of additive value functions representing a reference preorder and intensities of preference: GRIP method". *European J. Operational Research* (à paraître).

Greco S., Mousseau V., Slowinski R. (2007a): "Multicriteria sorting with a set of value functions", *Joint Conference FRANCORO V / ROADEF 2007*, Grenoble, France, February 20-23, 2007.

Greco S., Mousseau V., Slowinski R. (2007b): "The necessary and the possible in a perspective of robust decision aiding", *66th Meeting of the EURO Working Group "Multiple Criteria Decision Aiding"*, Marrakech, Morroco, October 18-20, 2007.

Greco S., Mousseau M., Slowinski R. (2008): " Ordinal regression revisited: multiple criteria ranking with a set of additive value functions", *European Journal of. Operational Research* (à paraître).

Hites R., De Smet Y., Risse N., Salazar M., Vincke P. (2006): "About the applicability of MCDA to some robustness problems", *European Journal of Operational Research*, Vol. 174, n° 1, 322-332.

Jia Z., Ierapetritou M. G. (2007): "Generate Pareto optimal solutions of scheduling problems using normal boundary intersection technique", *Computers & Chemical Engineering*, Vol. 31, n° 4, 268-280.

Kennington J., Lewis K., Olinick E., Ortynski A., Spiride G. (2001): "Robust solutions for the WDM routing and provisioning problem with uncertain demands and single link failure protection", Technical Report 01-EMIS-07, EMIS Dept., SMU, Dallas.

Kouvelis P., Yu G. (1997): *Robust discrete optimization and its applications*, Kluwer Academic Publishers, Boston.

Lamboray C. (2007): "Supporting the search for a group ranking with robust conclusions on prudent orders", in Roy B., Aloulou M.A., Kalaï R. (Guest Editors): *Robustness in OR-DA*, Université Paris-Dauphine, Annales du LAMSADE n° 7, 145-172.

Pomerol J.C., Roy B., Rosenthal-Sabroux C., Saad A. (1995): "An «intelligent» DSS for the multicriteria evaluation of railway timetables", *Foundations of Computing and Decision Sciences*, Vol. 20, No. 3, 219-238.

Roy B. (1996): *Multicriteria Methodology for Decision Analysis*, Kluwer Academic Publishers.

Roy B. (1997): "Une lacune en RO-AD : les conclusions robustes", Université Paris-Dauphine, *Cahier du LAMSADE* n° 144.

Roy B. (1998): "A missing link in OR-DA, Robustness analysis", *Foundations of Computer and Decision Sciences*, Vol. 23, n° 3, 141-160.

Roy B. (2004) : « Robustesse de quoi et vis-à-vis de quoi mais aussi robustesse pourquoi en aide à la décision ? », in : Henggeler Antunes C., Figueira J., Clímaco J. (eds.) : *Aide Multicritère à la Décision – Multiple Criteria Decision Aiding*, 56e Journées du Groupe de Travail Européen « Aide Multicritère à la Décision » – 56th Meeting of the European Working Group « Multiple Criteria Decison Aiding », Coimbra, Portugal, October 3-5, 2002, Comissão de Coordenação e Desenvolvimento Regional do Centro, INESC Coimbra, Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra, 29-39.

Roy B. (2005) : « A propos de robustesse en recherche opérationnelle et aide à la décision », in : Billaut J.C., Moukrim A., Sanlaville E. (sous la direction de) : *Flexibilité et robustesse en ordonnancement*, Paris, Lavoisier, 35-50.

Roy B. (2007) : « La robustesse en recherche opérationnelle et aide à la décision : une préoccupation multi-facettes », in Roy B., Aloulou M.A., Kalaï R. (Guest Editors): *Robustness in OR-DA,* Université Paris-Dauphine, Annales du LAMSADE n° 7, 209-236.

Roy B., Bouyssou D. (1993) : *Aide multicritère à la décision : Méthodes et cas*, Paris, Economica.

Roy B., Hugonnard J.C. (1982): "Ranking of suburban line extension projects on the Paris metro system by a multicriteria method", *Transportation Research*, Vol. 16A, n° 4, 301-312.

Roy B., Présent M., Silhol D. (1983) : « Programmation de la rénovation des stations du métro parisien : Un cas d'application de la méthode ELECTRE III », Université Paris-Dauphine, *Document du LAMSADE* n° 24.

Roy B., Présent M., Silhol D. (1986): "A programming method for determining which Paris metro stations should be renovated", *European Journal of Operational Research*, Vol. 24, 318-334.

Salazar D.E., Rocco C.M.S. (2007): "Solving advanced multi-objective robust designs by means of multiple objective evolutionary algorithms (MOEA): A reliability application", *Reliability Engineering & System Safety*, Vol. 92, n° 6, 697-706.

Siskos Y., Grigoroudis E., Matsatsinis N.F. (2005): "UTA Methods", Chapter 8 in: J. Figueira, S. Greco, M. Ehrgott (eds.), *Multiple Criteria Decision Analysis – State of the Art Surveys*, Springer, Berlin, 297-343.

Soyster, L. A. (1973): “Convex programming with set-inclusive constraints and application to inexact linear programming”, *Operations Research*, Vol. 2, 1154–1157.

Soyster, L. A. (1974): “A duality theory for convex programming with set-inclusive constraints”, *Operations Research*, Vol. 22, 892–898.

Steuer R.E. (1986): *Multiple criteria optimization: Theory, computation and application*, John Wiley, New York.

Vincke P. (1999a): “Robust and neutral methods for aggregating preferences into an outranking relation”, *European Journal of Operational Research*, Vol. 112, n° 2, 405-412.

Vincke P. (1999b): “Robust solutions and methods in decision-aid”, *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, Vol. 8, 181-187.

Annexe : Exemple numérique

On considère ici 20 actions évaluées dans 20 scénarios (cf. tableau 1) selon un critère v servant à exprimer un gain.

Action	**s1**	**s2**	**s3**	**s4**	**s5**	**s6**	**s7**	**s8**	**s9**	**s10**	**s11**	**s12**	**s13**	**s14**	**s15**	**s16**	**s17**	**s18**	**s19**	**s20**
1	150	180	170	175	165	160	170	175	160	175	170	165	155	160	170	165	170	165	180	180
2	170	140	190	190	170	175	170	160	165	160	190	165	170	190	190	190	190	170	170	190
3	180	130	175	170	175	175	175	175	170	175	190	190	195	190	195	190	195	190	195	190
4	200	120	190	195	190	195	190	195	190	195	190	195	190	195	190	200	190	195	200	210
5	90	90	210	205	200	205	195	200	190	195	195	200	205	210	215	210	210	205	220	210
6	160	140	190	195	200	195	190	195	190	190	175	160	175	160	175	160	150	170	170	175
7	190	125	175	175	175	190	175	170	175	175	190	195	190	195	190	195	190	185	200	210
8	170	140	190	195	190	195	190	195	190	195	180	185	180	185	180	185	180	185	125	100
9	95	125	190	165	165	155	175	160	165	150	150	165	170	165	160	155	165	170	185	120
10	100	130	175	195	160	155	155	150	170	155	145	140	155	160	155	160	155	160	185	110
11	105	135	110	120	195	150	160	155	150	130	145	155	145	160	155	150	135	145	90	190
12	110	145	120	155	165	195	145	150	165	170	155	160	165	170	155	155	170	165	195	90
13	115	150	150	165	160	150	195	145	140	150	165	170	145	160	170	155	170	165	185	120
14	120	125	155	160	155	145	165	195	155	160	155	160	165	170	155	145	165	170	200	110
15	125	130	145	150	165	170	165	160	195	170	155	150	165	160	155	170	165	160	170	185
16	130	125	135	150	145	150	155	160	165	195	155	145	170	155	145	140	145	135	160	185
17	135	130	155	135	130	120	135	150	145	125	195	135	125	155	135	120	110	175	180	190
18	140	135	145	130	125	145	140	135	125	130	135	195	160	155	150	145	140	135	150	185
19	145	130	135	155	150	145	125	155	150	145	135	140	195	150	145	155	145	150	190	160
20	145	125	125	135	155	150	140	145	155	150	145	135	155	195	140	145	160	165	180	170

Tableau 1. Tableau de performance des actions potentielles

On suppose ici que le scénario s_1 fait intervenir, pour chaque point de fragilité, une valeur que le décideur juge particulièrement plausible. Les autres scénarios ont été construits en prenant en compte diverses combinaisons (jugées possibles) de valeurs qui s'écartent significativement de celles retenues dans s_1. On s'intéresse ici au cas où le décideur souhaite, pour éclairer son choix, prendre en compte, à côté du gain que lui procure la solution x dans le scénario s_1 (gain noté ci-après $v_1(x)$), deux critères qu'il juge pertinents pour apprécier la robustesse de la solution x :

– le critère $r_1(x)$ exprimant le pire gain auquel peut conduire la solution x lorsque le décideurf prend en compte les 20 scénarios considérés ;
– le critère $r_2(x)$ qui lui indique le nombre des scénarios qui lui garantissent un gain au moins égal à une valeur b=190, valeur qui constitue pour lui un objectif qu'il souhaite atteindre, si possible dépasser avec le maximum de chances.

Action	v_1	r_1	r_2
1	150	150	3
16	160	140	8
12	170	140	9
3	180	130	10
7	190	125	10
4	200	120	19

Tableau 2. Ensemble des actions efficaces pour *b*=190

Avec les trois critères retenus, parmi les 20 actions, 6 seulement sont efficaces (cf. tableau 2). Ce tableau met le décideur face à ses responsabilités tout en lui permettant de prendre conscience de la part de subjectivité qui est attachée à n'importe quel choix argumenté sur la base des trois critères retenus. Selon son attitude face au risque et la façon dont il apprécie la vraisemblance des différents scénarios, il peut être conduit à :

- Choisir x_4 : cela suppose qu'il accepte de prendre le risque de ne gagner que 120, valeur très éloignée de son objectif, 190. Le fait que cet objectif soit non seulement atteint mais significativement dépassé dans tous les scénarios sauf s_2 peut l'amener à courir ce risque. Il peut néanmoins renoncer à ce choix s'il pense que le scénario s_2 est assez plausible et qu'un gain limité à 120 serait fort dommageable.
- Ne pas choisir x_4 (pour les raisons qui précèdent) : ceci doit normalement l'amener à éliminer x_7 qui, dans le scénario s_2, conduit à gain à peine supérieur à celui qu'il aurait avec x_4 tout en ayant des gains au mieux égaux dans la plupart des autres scénarios. Maximiser le gain minimum le conduirait à choisir x_1. Ce choix peut lui paraître mauvais car d'une part, dans le scénario s_1 qu'il privilégie, il est loin d'atteindre son objectif (150 au lieu de 190) et, d'autre part, cet objectif n'est atteint dans aucun des 19 autres scénarios. Constatant que, quel que soit son choix parmi les cinq autres actions efficaces, le scénario s_2 lui fait courir un risque, il peut juger que les meilleurs compromis entre chances d'atteindre son objectif et risques d'un gain médiocre sont obtenus soit avec x_3, soit avec x_6 (cette dernière solution lui paraissant préférable à x_2 qui conduit au même résultat dans le scénario s_2).

L'analyste doit attirer l'attention du décideur sur le fait que, s'il veut bien réviser à la baisse l'objectif *b*=190, l'ensemble des actions efficaces peut être modifié et faire apparaître d'autres compromis. C'est en effet le cas en posant *b*=180 (cf. tableau 3). L'action x_8 garantit un gain de 140 (tout comme x_6) mais, outre le fait qu'elle est meilleure dans le scénario s_1, elle garantit le gain 180 dans 16 scénarios au lieu de 8 avec x_6.

Action	***v*₁**	***r*₁**	***r*₂**
1	150	150	3
8	170	140	16
3	180	130	11
7	190	125	10
4	200	120	19

Tableau 3. Ensembles des actions efficaces pour *b*=180

Ainsi, selon son ambition (niveau d'objectif souhaité) et selon son attitude face au risque (pire cas), le décideur peut être conduit à devoir arbitrer entre x_4 et x_8.